

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
Федеральное государственное образовательное бюджетное  
учреждение высшего профессионального образования  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ  
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

**В. Ю. Волков**

**АДАПТИВНЫЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ  
И РОБАСТНЫЕ МЕТОДЫ  
ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ  
СИГНАЛОВ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Часть 3**

**СПбГУТ )))**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2012**

УДК 621.391.26(075.8)

ББК 388-01я73

Рецензент

кандидат технических наук, заместитель декана факультета радиотехники и телекоммуникаций, доцент кафедры радиосистем СПб ГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) *А. С. Маругин*

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ  
в качестве учебного пособия*

**Волков, В. Ю.**

В67      Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов: часть 3: учебное пособие / – СПб. : Издательство СПбГУТ, 2012. – с.

Основной задачей данного учебного пособия является систематическое изложение и пояснение новых достаточно сложных понятий и идей теории приема и обработки при отсутствии полного статистического описания сигналов и помех, т. е. в условиях априорной неопределенности.

Описаны алгоритмы обнаружения и различения сигналов при действии шумов с негауссовскими распределениями. Рассмотрены простые и практически важные модельные распределения шума, дан синтез и анализ характеристик обнаружителей с адаптивным порогом при неизвестных параметрах распределения шума. Приведены программы моделирования случайных полей и программы обнаружения сигналов от объектов на их фоне в среде Matlab.

Пособие предназначено для студентов специальностей 210400, 210302 и 210700 университетов связи, дипломников, магистров, аспирантов и специалистов в области радиотехники и телекоммуникаций при изучении дисциплин «Статистическая теория радиотехнических систем», «Перспективные методы обработки сигналов и полей в РТС», при выполнении курсовых и дипломных работ, а также в научно-исследовательской работе.

**УДК 621.391 (075.8)**

**ББК 32.88-01я73**

© Волков В. Ю., 2012

© Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2012

# СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ.....	3
1. ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ .....	4
1.1. Постановка задачи обнаружения и различения сигналов в условиях априорной неопределенности.....	4
1.2. Обнаружение и различение объектов на изображениях.....	5
1.3. Обнаружители с адаптивным порогом.....	7
2. НЕГАУССОВСКИЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ .....	11
2.1. Обнаружение изменения параметра экспоненциального распределения.....	11
2.2. Различение пуассоновских потоков с неизвестными интенсивностями.....	15
2.3. Обнаружение изменения параметра формы гамма-распределения.....	21
3. ОБНАРУЖИТЕЛИ С АДАПТИВНЫМ ПОРОГОМ .....	27
3.1. Обнаружитель с медленным порогом.....	27
3.2. Обнаружитель с порогом по среднему значению шума.....	31
3.3. Обнаружитель с порогом по максимальному значению шума.....	34
3.4. Обнаружители с комбинированным порогом.....	37
3.5. Адаптивный порог для логнормального распределения помехи.....	40
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ПОЛЕЙ И АЛГОРИТМОВ В СРЕДЕ Matlab .....	45
4.1. Формирование объектов на изображениях.....	45
4.2. Моделирование шумов с различными распределениями вероятности.....	47
4.3. Моделирование объектов на фоне шумов и алгоритмов обнаружения с постоянным порогом.....	53
<b>W=size(Y); H=W(1)*W(2);</b> .....	58
<b>I(i,j)=0;</b> .....	58
<b>A=sum(sum(I));</b> .....	58
4.4. Моделирование алгоритмов обнаружения с адаптивным порогом в случае экспоненциального шума.....	65
4.5. Моделирование алгоритмов обнаружения с адаптивным порогом в случае нормального шума.....	77
4.6. Примеры обнаружения объектов на реальных изображениях радиотехнических систем наблюдения.....	83
ВЫВОДЫ .....	85
Приложение 1.....	87
Приложение 2.....	88
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	95

# 1. ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

## 1.1. Постановка задачи обнаружения и различения сигналов в условиях априорной неопределенности

Основные элементы общей задачи приема (событие, сигнал, наблюдение и решение) имеют различное содержание в зависимости от конкретной задачи. В задачах обнаружения и различения имеется конечный набор событий и решений, и эти задачи проще, чем задачи оценивания параметров, разрешения и идентификации объектов. Математические модели для описания элементов задачи приема могут быть параметрическими или непараметрическими. Для математической постановки задачи приема необходим также критерий оптимальности, и метод (алгоритм) обработки [1, 2]. Общая структура алгоритмов обработки наблюдений для принятия решений изображена на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Общая структура алгоритмов обработки наблюдений для принятия решений

Параметрические модели позволяют в ряде случаев получить оптимальные алгоритмы, обеспечивающие экстремум выбранного критерия. Существенная априорная неопределенность не позволяет непосредственно использовать классические критерии, а также методы, основанные на формировании отношения правдоподобия, делает невозможным расчет порогов для сравнения решающих статистик.

Известные методы преодоления априорной неопределенности и алгоритмы обработки для гауссовских задач часто оказываются универсальными, т. е. неплохо работают и в других ситуациях. Однако по мере развития антенной техники, совершенствования передатчиков и приемников, и увеличения вычислительных мощностей процессоров, осуществляющих обработку, растут и требования к универсальности системы обработки, и к качеству решаемых ею задач. Развитие техники вызвало использование более сложных негауссовских моделей для синтеза алгоритмов, что дало массу новых интересных решающих статистик для задач, где гауссовская модель является не очень хорошим приближением, а негауссовские процессы вытекают из физики явлений.

Как известно, статистиками называются как исходные наблюдения, так и величины, получаемые из них путем ряда преобразований [1, 2]. Интенсивно исследуются новые и интересные непараметрические статистики, получаемые в результате обобщенных спектральных преобразований, например *вейвлеты*. Широкий набор новых статистик связан также с формированием признаков из принимаемых наблюдений.

Признак как новый элемент задачи приема появляется в сложных задачах, тогда как в простых задачах признаком было само исходное наблюдение. Именно отсутствие полного описания модели вызвало необходимость промежуточного этапа при формировании решающих статистик из наблюдений. Фактически система признаков выбирается из некоторых эвристических соображений при требовании их инвариантности как к изменениям интенсивности сигнала, так и масштабной пространственной инвариантности при изменении геометрической схемы наблюдения. Примерами признаков являются статистические моментные функции, гистограммы ориентаций сигнальных векторов и т. д. Признак должен обеспечить первоначальную редукцию наблюдений с тем, чтобы стало возможным использование известных методов, но не по отношению к исходным наблюдениям, а уже к сформированным признакам.

На сегодняшний день стройная теория оптимального формирования признаков для решения даже относительно простых радиотехнических задач еще не разработана, поэтому на практике задачи решаются в значительной степени на основе уже накопленного опыта применения тех или иных статистик. Однако принципы инвариантности, робастности (статистической устойчивости) и адаптации алгоритмов применяются на каждом этапе решения частных задач. Далее будут приведены примеры, иллюстрирующие указанные применения.

## **1.2. Обнаружение и различение объектов на изображениях**

Радиотехнические системы решают целый ряд задач приема и обработки сигналов, простейшими из которых являются задачи обнаружения и различения сигналов на фоне помех. Предполагается, что полезные сигналы соответствуют физическим объектам в пространстве или на земной поверхности, обычно это объекты искусственного происхождения (самолеты, корабли, автомобили, здания, сооружения, дороги, мосты). Вследствие разнообразия физических объектов полное описание их математических моделей, как правило, отсутствует. Некоторые объекты как естественного, так и искусственного происхождения, являются мешающими, т. е. пассивными помехами (деревья, рельеф местности, радиотехнические системы, работающие в том же диапазоне частот). Кроме них, могут действовать и активные помехи как естественные, так и искусственные.

В условиях априорной неопределенности задачи обнаружения и различения становятся частями более сложной проблемы распознавания объектов. Эта проблема может включать также задачи оценивания

параметров и локализации объектов, выделения, классификации, и идентификации признаков, то есть представляет комплексную задачу приема.

Современные радиотехнические системы наблюдения обычно формируют двумерные сигналы, т. е. изображения. Это относится к радарам высокого разрешения с синтезированной апертурой и к инфракрасным системам наблюдения. Вид изображения может быть обычным телевизионным как в радарх с САР, так и специальным, например, в координатах дальность-скорость (пространственно-временным). Примеры некоторых изображений приведены на рис. 1.2.

В связи со сложностью моделей, описывающих реальные объекты (корабли, автомобили, строения, мосты и др.), задача обнаружения обычно решается для фрагментов таких изображений. При этом интересные объекты могут иметь интегральное представление (в виде пятен) или дифференциальное (в виде контурных линий). Для получения таких представлений исходное изображение подвергается предварительной линейной обработке, включающей сглаживание и дифференцирование.

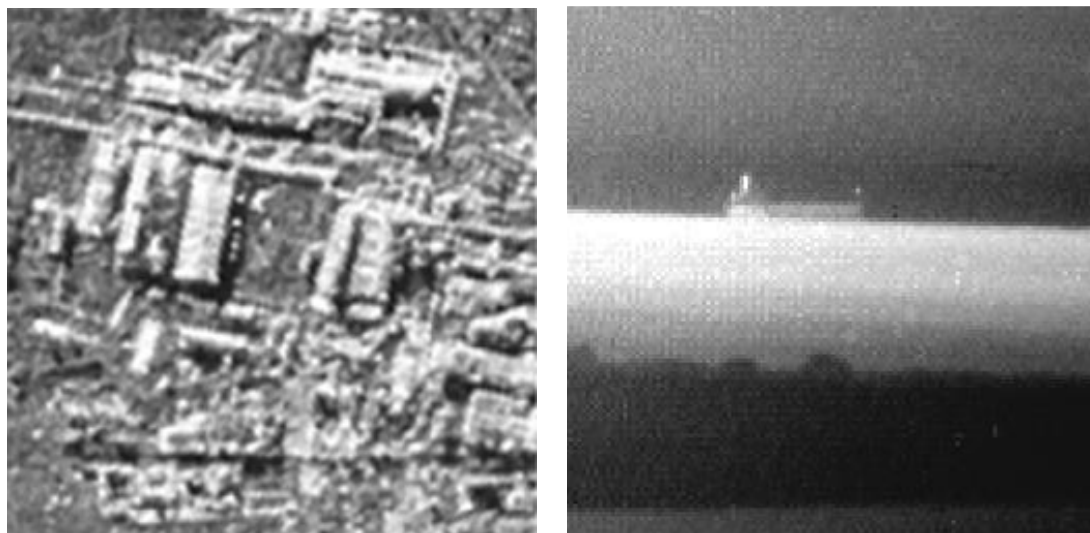


Рис. 1.2. Примеры радиолокационного изображения местности, полученного радаром высокого разрешения с синтезированной апертурой (слева), и оптоэлектронного изображения корабля на море с выхода инфракрасной системы наблюдения (справа)

Сравнительно легко выделяются простейшие геометрические примитивы: прямолинейные отрезки, пересечения линий и углы на контурах. Кроме того, существует понятие ключевых точек, или точек интереса, которые локализуют центры соответствующих областей интереса. Такие области обычно соответствуют полезным объектам на изображении. Часто ключевые точки используются для сравнения изображений, полученных с разных источников. Такое сравнение необходимо, например, для решения навигационных задач и для слежения за движущимися объектами.

Наиболее просто рассмотренные признаки могут быть сформированы на бинарном изображении. Бинарные изображения получаются в результате пороговой обработки, которая позволяет выделить сигнальные и фоновые

области, т. е. произвести сегментацию изображения. Для этого широко используются локальные и адаптивные пороговые уровни, и специальные алгоритмы для их формирования. От решения этой задачи зависит вся дальнейшая обработка в автоматических системах наблюдения и системах машинного зрения. Далее рассматриваются задачи обнаружения простых объектов на фоне негауссовских шумов в условиях априорной неопределенности относительно параметров распределений.

### 1.3. Обнаружители с адаптивным порогом

Простейшая адаптация обнаружителя сводится к изменениям порогового уровня для решающей статистики. Этот класс алгоритмов называется *обнаружителями с адаптивным порогом*.

*Одновыборочные* алгоритмы формируют порог из исходной наблюдаемой выборки. Фактически они работают в режиме самообучения. Обнаружитель с адаптивным порогом для обнаружения сдвига гауссовского распределения при неизвестной дисперсии рассмотрен в [3].

*Двухвыборочные* алгоритмы используют классифицированную обучающую выборку помехи. Адаптивный обнаружитель для гауссовской задачи приведен в [3]. Во многих случаях обучающие выборки помехи используются для формирования адаптивного порога. Различные варианты адаптивного порога получаются *комбинированием* разных алгоритмов, полученных для конкретных моделей.

Более широкий класс адаптивных правил представляют *гибридные структуры* [4], основанные на наборе  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q\}$  исходных или *базовых* решающих правил.

Гибридное правило получается в результате обучения, в простейшем случае осуществляется выбор одного из базовых алгоритмов. Существуют линейные и нелинейные алгоритмы гибридизации, приводящие к достаточному разнообразию решающих правил, при этом, конечно, гибрид должен быть лучше каждого из «родителей». Если все правила используют одну и ту же решающую статистику, то гибридное правило может использовать набор адаптивных порогов, формируемых разными способами.

Общая структура обнаружителя с адаптивным порогом представлена на рис. 1.3. На вход поступают электрические сигналы с выхода антенного устройства, которое осуществляет пространственную и предварительную частотную обработку (преселекцию). Внутрипериодная обработка в приемном устройстве (ПРМ) включает частотную фильтрацию, временную селекцию и детектирование (амплитудное или фазовое). Дальнейшая последетекторная обработка обычно реализуется как межпериодная, и осуществляется путем накопления результатов внутрипериодной обработки.

*Формирователь каналов* обеспечивает пространственно-временное и частотное *разделение* входных сигналов с использованием тех или иных видов селекции. Селекция сигнала и помехи может быть частотной, временной и пространственной.



Рис. 1.3. Обнаружитель с адаптивным порогом

В случае импульсного сигнала используется временная селекция, которая является в то же время пространственной, так как сигналы приходят последовательно с разных участков дальности. В импульсных локационных системах каналы дальности формируются временным стробированием. Частотные каналы образуются в результате фильтрации. В случае многоканальных антенн применяется формирование пространственно-разнесенных каналов. Совокупность выходов каналов можно рассматривать как изображение. Затем осуществляется *группирование* каналов: часть каналов (*сигнальные* каналы) анализируется, а другая часть (обычно соседние с анализируемыми каналами) выступает как *помеховые (опорные)* каналы. Для этого используются окна, скользящие по изображению.

В терминах теории адаптации с обучением сигнальные каналы являются *контрольными*, а помеховые – *обучающими*. В радиолокации используются каналы дальности, частотные каналы или угловые каналы. Каждый из каналов может выступать в качестве контрольного, либо обучающего. Обычно выходы каналов используются для формирования изображения, и дальнейшая обработка производится в целях сегментации, выделения и распознавания объектов на изображениях.

Группирование каналов и выделение сигнальных и помеховых каналов представляют важный этап обработки. На этом этапе выбираются формы и размеры окон, устанавливается порядок считывания изображения. Обозначим выборки в сигнальном окне через  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ , а выборки в помеховом окне – через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ .

На следующем этапе обработки формируются статистики, устанавливаются пороги и принимается решение на данном шаге. *Селектор сигнала* формирует решающую статистику  $u(y_1, \dots, y_N)$ , а *селектор помехи* формирует статистику  $v(x_1, \dots, x_M)$ . *Формирователь порога* может использовать для формирования порога статистику  $v(y)$  и предыдущие решения  $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots$ , где  $n$  – номер шага.

Для установки порога адаптивные алгоритмы используют ту или иную оценку процентной точки одномерного распределения решающей статистики  $u(y)$ . Использование статистики  $v(x)$  позволяет установить порог



непосредственно на данном шаге и реализовать одношаговый алгоритм. Такая схема адаптации известна как *быстрый порог* или адаптация «*вперед*». Учет предыдущих решений используется в адаптивных многошаговых алгоритмах. Адаптация по решениям обычно устанавливает порог с запаздыванием. Соответствующая схема называется адаптацией «*назад*» или *медленным порогом*.

Обнаружители с медленным порогом используют адаптацию только по предыдущим решениям, т. е.  $u_n \geq L_n(d_{n-1}, d_{n-2}, \dots)$ , т. е. реализуют процесс самообучения.

Алгоритм с быстрым порогом принимает решение о наличии сигнала, если  $u(y) \geq L(x)$ , где  $L(\cdot)$  – *пороговая функция (адаптивный порог)*. Обнаружители с «быстрым» порогом не используют предыдущие решения, т. е. представляют двухвыборочные алгоритмы, где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  – сигнальная и помеховая выборки. Адаптация порога в данном случае соответствует обучению по *классифицированной* помеховой выборке. В случае  $N=1$  используется один сигнальный канал, т. е.  $y \geq L(x)$ . Обычно это связано с обнаружением *локальной* (точечной) цели на фоне *протяженной* помехи, занимающей  $M$  каналов.

Важно, чтобы помеха в помеховом окне была такой же, как в сигнальном окне, т. е. помеха должна быть *однородной*. Это требование тем труднее выполнить, чем больше сигнальных и помеховых каналов используется. Возможно, что часть помеховых каналов на самом деле содержит другие полезные сигналы, либо «поражена» помехой, отличающейся от помехи в анализируемых каналах. Это приводит к существенному ухудшению качества обнаружения, если не приняты специальные меры. В частности, можно провести предварительную выбраковку резко отличающихся (аномальных) выборок помехи. Эта операция называется *цензурированием*. Она незначительно уменьшает число помеховых выборок, но позволяет уменьшить влияние неоднородности помехи, т. е. повысить устойчивость или *робастность* алгоритма.

Весьма негативное влияние на работу таких обнаружителей оказывает резкая смена вида помехи в пределах скользящего окна так называемые «*кромки*» помехи, поскольку они не удаляются цензурированием. Это требует специальных мер обнаружения кромок и адаптации самих окон.

Обнаружитель с *порогом по среднему* включает наиболее распространенный вариант пороговой функции с суммированием (усреднением – averaging) помеховых выборок и представляет *A-Detector*. Используются также другие обозначения обнаружителя, отражающие формирование порога: *Mean-Level-Detector* (порог по среднему уровню), *Cell-Averaging-Detector* (порог с усреднением по ячейкам) [5, 6].

Алгоритм обнаружения записывается в виде  $y \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M x_k$ , где  $c_1$  – пороговая константа. В общем виде этот класс обнаружителей может использовать нелинейные (безынерционные) преобразования опорных

выборки и представляется в виде  $\psi(y) \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M \psi(x_k) + c_0$ , где  $c_0$  и  $c_1$  – пороговые константы. В частности, при логарифмическом преобразовании получается *Log-A-Detector*  $\log(y) \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M \log(x_k) + c_0$ .

Алгоритм с *порогом по максимуму* или *M-Detector* имеет вид  $y \geq c_2 \cdot \max(x_1, x_2, \dots, x_M)$ , где  $c_2$  – пороговая константа. В случае  $c_2 = 1$  получаем знаковый алгоритм  $\sum_{k=1}^M \text{sgn}(y - x_k) \geq M$ , обладающий непараметрическими свойствами [3]. При этом вероятность ложной тревоги  $F = 1/(1 + M)$  определяется только числом независимых опорных выборок, и она не зависит от распределения шума в этих выборках.

При  $c_2 \neq 1$  алгоритм становится чувствительным к виду распределения шума, хотя при определенных условиях его можно считать *квазинепараметрическим* (т. е. *почти* непараметрическим).

Алгоритм *Хаббарда* [7], или *H-Detector* имеет вид  $y \geq c_3 \cdot \max(\sum_{k=1}^{M/2} x_k, \sum_{k=M/2+1}^M x_k)$ . Опорные каналы разбиты на две группы. При этом число опорных каналов полагается четным. Такое формирование порога позволяет снизить вероятность ложной тревоги при появлении кромок неоднородной помехи.

Алгоритм с *порогом по выборочной медиане* [8],  $y \geq c_4 \cdot \text{med}(x_1, x_2, \dots, x_M)$ , также можно отнести к *квазинепараметрическим*, т. е. *почти* непараметрическим.

Недостатком алгоритмов с «быстрым» порогом является все-таки существенная зависимость вероятности ложной тревоги от вида распределения помехи. Для улучшения качества алгоритмов можно использовать «комбинированное» формирование порога. Например, комбинирование схем *A-Detector* и *M-Detector* дает алгоритм *AM-Detector*  $y \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M x_k + c_2 \cdot \max(x_1, \dots, x_M)$ . Комбинирование порогов позволяет расширить класс адаптивных алгоритмов. Помимо этого, «быстрый» и «медленный» пороги могут использоваться одновременно, поскольку знание предыдущих решений позволяет полнее учесть имеющуюся информацию. Решение на  $n$ -м шаге о наличии полезного сигнала принимается, если  $u_n \geq L_n(v_n, d_{n-1}, d_{n-2}, \dots)$ .

Расчет характеристик обнаружения для алгоритма с адаптивным порогом существенно отличается от случая обнаружителя с постоянным порогом. Рассмотрим случай «быстрого» порога и одношаговый алгоритм обнаружения  $u(y) \geq L(v(x))$ .

Если известна модель наблюдений и есть возможность рассчитать условные вероятности  $w_0(u | v)$  и  $w_1(u | v)$  для статистики  $u$  соответственно при отсутствии и при наличии полезного сигнала, то можно записать условные вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения в предположении фиксированного значения порога  $L(v)$ :

$$P_0(L(v)) = \int_L^\infty w_0(u | v) du, \quad P_1(L(v)) = \int_L^\infty w_1(u | v) du.$$

Далее требуется усреднить полученные выражения по плотности вероятности статистики  $v$ . Безусловные вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения находятся путем интегрирования предыдущих выражений по плотности  $w(v)$ .

В некоторых случаях удобнее сначала найти условную вероятность неперевышения адаптивным порогом  $L(v)$  фиксированного значения решающей статистики  $u$ . Такая вероятность рассчитывается по формуле:  $p(u) = P\{L(v) < u\} = \int_{-\infty}^u w(L | u) dL$ . При этом необходимо найти условную плотность распределения вероятности случайного порога  $w(L | u)$ . Теперь безусловные характеристики обнаружения получаются усреднением вероятности  $p(u)$  по каждой из плотностей  $f_0(u)$  или  $f_1(u)$  для сигнальной решающей статистики. Применение той или иной методики расчетов зависит от конкретных моделей, используемых для описания сигнально-помеховой ситуации, и будет проиллюстрировано в дальнейшем.

## 2. НЕГАУССОВСКИЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

### 2.1. Обнаружение изменения параметра экспоненциального распределения

Пусть наблюдения  $y_k \geq 0$  в независимый выборке  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ , имеют экспоненциальное (показательное) распределение  $E(\beta)$ , где  $\beta > 0$  – параметр масштаба:  $f(y) = (1/\beta) \exp(-y/\beta)$ . Появление полезного сигнала связано с изменением параметра масштаба. Такая модель применяется для описания процессов на выходе квадратичного детектора при воздействии на вход гауссовских помех и сигналов в случае быстрых флуктуаций [9, 10].

Проверяется сложная гипотеза  $H_0: \beta = \beta_0$ , против сложной альтернативы  $H_1: \beta = \beta_1 \neq \beta_0$ , где значения  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – неизвестны. При использовании критерия Неймана–Пирсона *существенными* являются параметр  $\beta_0$ , который входит в порог [1, 2], а также вид неравенства  $\beta_1 > \beta_0$  или  $\beta_1 < \beta_0$ . Введем относительное изменение параметра  $d = (\beta_1 - \beta_0)/\beta_0$ , которое в данном случае может меняться от  $-1$  до  $\infty$ . Величина  $d$  имеет смысл отношения сигнал/шум на входе.

В случае одной выборки  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  решение этой задачи в принципе возможно с привлечением байесовского или минимаксного подходов. Однако одновыборочные алгоритмы практически малоэффективны, поэтому чаще применяются двухвыборочные алгоритмы.

Рассмотрим двухвыборочный алгоритм, когда наряду с анализируемой имеется другая (опорная) выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  из экспоненциального

распределения с параметром  $\beta_0$ . Совместное распределение выборок при гипотезе  $H_1$ :

$$f_1(y, x) = (1/\beta_0^N \beta_0^M) \exp\{\phi(\sum_{k=1}^M x_k + \sum_{k=1}^N y_k) + \lambda \sum_{k=1}^N y_k\}$$

позволяет выделить *полезный* параметр  $\lambda = (\beta_1 - \beta_0)/\beta_1 \beta_0$  и *мешающий* параметр  $\phi = -1/\beta_0$ , и соответствующие достаточные статистики  $u = \sum_{k=1}^N y_k$  и  $v = \sum_{k=1}^M x_k + \sum_{k=1}^N y_k$ . Очевидно, что  $0 < u \leq v$  и  $\phi < 0$ . Достаточность статистик следует из принадлежности их распределения к экспоненциальному семейству [2, 12].

Для определенности будем считать  $\beta_1 > \beta_0$ , т. е. альтернатива односторонняя с  $d > 0$ , тогда  $\lambda > 0$ . Отдельное рассмотрение случая  $d < 0$  не требуется, так как при этом анализируемая и опорная выборки просто меняются местами, и задача сводится к предыдущей.

Сложнее обстоит дело с двусторонней альтернативой, когда заранее неизвестно, будет ли параметр масштаба в анализируемой выборке больше или меньше, чем в опорной. В этом случае решается задача различения, т. е. проверяются обе гипотезы.

Совместное распределение достаточных статистик находится из совместного распределения независимых случайных величин  $z_1 = \sum_{k=1}^N y_k$  и  $z_0 = \sum_{k=1}^M x_k$ . При гипотезе  $H_1$  величины  $2z_1/\beta_1$  и  $2z_0/\beta_0$  имеют соответствующие распределения хи-квадрат  $\chi_{2N}^2$  и  $\chi_{2M}^2$ .

После преобразования переменных получаем

$$w_1(u, v) = (1/\beta_1^N \beta_0^M \Gamma(M)\Gamma(N)) u^{N-1} (v-u)^{M-1} \exp(\phi v + \lambda u).$$

В данном случае якобиан преобразования равен единице [10].

Для нахождения оптимального по критерию Неймана–Пирсона алгоритма надо найти РНМ алгоритм в классе *подобных* в области гипотезы  $H_0$ .

В силу *полноты* семейства распределений

$$w_0(u, v) = (1/\beta_0^{N+M} \Gamma(M)\Gamma(N)) u^{N-1} (v-u)^{M-1} \exp(\phi v)$$

класс *подобных* алгоритмов совпадает с классом *неймановских* правил, которые определяются через условные плотности  $w_1(u | v)$  и  $w_0(u | v)$  [2, 12].

Поскольку условные плотности  $w(u | v)$  не зависят от мешающего параметра  $\beta_0$ , РНМ *подобное* правило можно найти для каждого конкретного значения  $v$ , сравнивая условное отношение правдоподобия  $\Lambda(u | v) = w_1(u | v) / w_0(u | v)$  с порогом  $\Lambda_T(v)$ . Если  $\Lambda(u | v)$  монотонно по  $u$ , то правило будет РНМ *несмещенным* [2].

Условная плотность  $w_1(u | v) = w_1(u, v) / w_1(v)$  вычисляется через *маргинальную* (краевую) плотность  $w_1(v) = \int_0^v w_1(u, v) du$ , которая принимает следующий вид:

$$w_1(v) = (1/\beta_1^N \beta_0^M \Gamma(M+N)) v^{M+N-1} \exp(\phi v) \cdot {}_1F_1(N, N+M, \lambda v).$$

Здесь  ${}_1F_1(N, N+M, \lambda v)$  – вырожденная гипергеометрическая функция [2, 13].

В результате для условных плотностей находятся следующие выражения:

$$w_0(u | v) = (1/vB(M, N))(u/v)^{N-1}(1-u/v)^{M-1},$$

$$w_1(u | v) = (1/vB(M, N)_1F_1(N, N + M, \lambda v))(u/v)^{N-1}(1-u/v)^{M-1} \exp(\lambda u),$$

где бета-функция  $B(M, N) = \Gamma(M)\Gamma(N)/\Gamma(M + N)$  определяется через гамма-функции [13, 19].

*Подобный* алгоритм (определение подобия [2]) имеет вид  $u \geq k \cdot v$ . Плотность  $w_0(u | v)$  является плотностью бета-распределения. Пороговая константа  $0 \leq k \leq 1$  находится из уравнения  $F_0 = \int_{kv}^v w_0(u | v) du = 1 - I_k(N, M)$ , где  $I_k(N, M)$  – неполная бета-функция ([2, прил. 2]), а  $F_0$  есть заданное значение вероятности ложной тревоги.

Алгоритм обнаружения можно переписать в форме  $z_1 \geq c \cdot z_0$ , которая соответствует *адаптивному* порогу. Здесь пороговая константа равна  $c = k/(1 - k)$ . Другая форма  $z_1/z_0 \geq c$  включает формирование *инвариантной* статистики по отношению к изменению масштаба наблюдений. В качестве параметра обнаружения можно выбрать дефлекцию статистики  $z_1$ , которая равна  $d_N = \sqrt{Nd}$ .

Поскольку отношение  $w_1(u | v; \lambda_1)/w_1(u | v; \lambda_2)$  монотонно по статистике  $u$  при любых значениях  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то решающее правило является *несмещенным* [2], следовательно, равномерно наиболее мощный подобный алгоритм является РНМ *несмещенным*.

Рассмотрим случай скалярных наблюдений:  $N = 1$ ,  $M = 1$ , когда имеются всего две случайные величины [14]. Совместная плотность при гипотезе  $H_1$

$$f_1(y, x) = (1/\beta_0\beta_1) \exp(-y/\beta_1 - x/\beta_0) = (1/\beta_0\beta_1) \exp(\phi v + \lambda u)$$

совпадает с плотностью  $w_1(u, v)$ , так как якобиан преобразования  $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = 1$

(преобразование переменных описано в [10]). Теперь маргинальная (краевая) плотность будет равна  $w_1(v) = \int_0^v w_1(u, v) du = \exp(\phi v)(\exp(\lambda v) - 1)/\beta_0\beta_1\lambda$ , а условная плотность при гипотезе  $H_1$  имеет вид

$$w_1(u | v) = w_1(u, v) / w_1(v) = \lambda \exp(\lambda u) / (\exp(\lambda v) - 1).$$

Для того чтобы получить условную плотность при гипотезе  $H_0$ , необходимо перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$w_0(u | v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} w_1(u | v) = [(\exp(\lambda u) + \lambda u \exp(\lambda u)) / v \exp(\lambda v)]_{\lambda \rightarrow 0} = 1/v$$

при  $u \leq v$ . Таким образом, при отсутствии полезного сигнала условное распределение имеет равномерную плотность, а при появлении сигнала плотность становится экспоненциально возрастающей по  $u$ .

Условное отношение правдоподобия монотонно по  $u$ , и *РНМ несмещенный подобный* алгоритм имеет вид  $u > L(v)$ , где пороговая функция  $L(v) = (1 - F_0)v$  получается интегрированием условной плотности  $w_0(u | v)$ .

Алгоритм  $y \geq c_1 x$  соответствует *адаптивному* порогу, а в эквивалентном виде  $y/x \geq c_1$  формирует *инвариантную* статистику по отношению к мешающему параметру. Здесь  $c_1 = (1 - F_0)/F_0$ . Отношение  $y/x$  иногда называется *контрастом*, а метод его формирования – *контрастным* приемом.

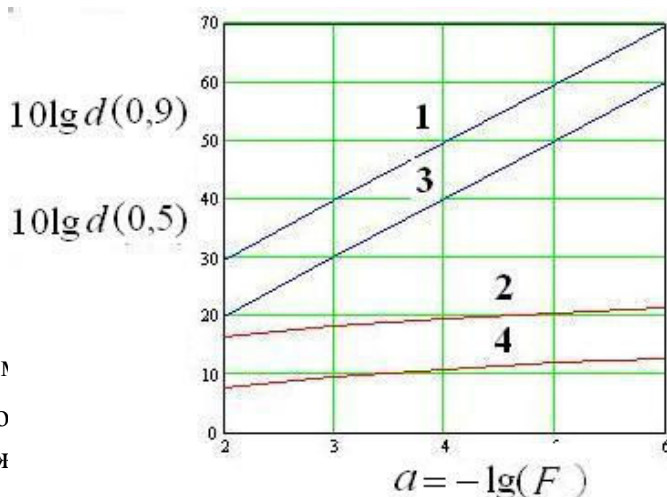
Вероятность ложной тревоги равна  $F_0 = 1/(1 + c_1)$ . Условная (при фиксированной величине  $v$ ) вероятность превышения порога при гипотезе  $H_1$  равна  $P_1(v, \lambda) = \int_{L(v)}^v w_1(u | v) du = (\exp(\lambda v) - \exp(\lambda L(v)))/(\exp(\lambda v) - 1)$ .

Нетрудно получить характеристику обнаружения в аналитическом виде [15]:

$$D = \int_0^\infty P_1(v, \lambda) w_1(v) dv = F_0(1 + d)/(1 + d \cdot F_0), \text{ или } 1/D = 1 + c_1/(1 + d).$$

Здесь  $d$  совпадает с дефлексией статистики  $y$  (определение дефлексии [2]). Пороговую дефлекцию можно записать в виде  $d^{(D, F)} = c_1/(10^b - 1) - 1 = (10^a - 10^b)/(10^b - 1)$ , где  $a = -\lg F_0$  и  $b = -\lg D$  есть степени вероятностей  $F_0$  и  $D$ . Эта величина при фиксированной вероятности правильного обнаружения  $b = -\lg D$  увеличивается с увеличением требуемого значения показателя степени вероятности ложной тревоги  $a = -\lg F_0$ .

Пороговые дефлекции (в децибелах)  $10 \lg d^{(0,9)}$  для  $D = 0,9$ ,  $b = 0,046$  (линии 1 и 3) и  $10 \lg d^{(0,5)}$  для  $D = 0,5$ ,  $b = 0,301$  (линии 2 и 4) построены на рис. 2.1. в зависимости от  $a = -\lg F_0$  для алгоритма обнаружения с адаптивным порогом (линии 1 и 2) (такие же характеристики имеет контрастный алгоритм), и для обнаружителя с постоянным порогом (линии 2 и 4).



Линейная зависимость от  $a$  (верхние линии) для контрастного алгоритма соответствует экспоненциальному росту значений  $d^{(D, F)}$  с увеличением  $a$  (т. е. с уменьшением вероятности ложной тревоги).

Для алгоритма с фиксированным порогом логарифмическая зависимость от  $a$  (нижние линии) отражает линейный рост пороговой

дефлексии  $d_0^{(D, F)} = a/b - 1$ .

Рассмотренный несмещенный подобный алгоритм, реализующий простое вычисление контраста, стабилизирует вероятность ложной тревоги при изменениях параметра масштаба шума, но вносит существенные потери в пороговую дефлекцию по отношению к алгоритму с фиксированным

Рис. 2.1. Зависимости  $d^{(0,9)}$  и  $d^{(0,5)}$  от вероятности лож

порогом, которые экспоненциально растут с ростом требуемой степени вероятности ложной тревоги. Снижение этих потерь возможно путем увеличения размера  $M$  обучающей выборки. Это достигается применением группирования выборок из исходного наблюдения, для чего используются одномерные либо двумерные окна.

В этом случае при  $N=1$  и различных  $M$  получаем практически важный класс обнаружителей с адаптивным порогом, которые широко используются при обработке сигналов и изображений. Они включают дифференцирующие фильтры вида  $z = y - \varphi(x)$ , выходной сигнал которых сравнивается с дополнительным аддитивным порогом. Этот класс обнаружителей подробно рассматривается далее. С увеличением  $M$  пороговые дефлекции алгоритмов уменьшаются, и стремятся к значениям, соответствующим алгоритму обнаружения с фиксированным порогом  $y \geq c_T$ .

В общем случае при  $N > 1$  и  $M > 1$  задача сводится к различению распределений хи-квадрат с известными степенями свободы и разными неизвестными параметрами масштаба. Расчет точных характеристик обнаружения затруднителен. Однако при больших значениях числа выборок  $N$  и  $M$  распределения статистик  $z_1 = \sum_{k=1}^N y_k$  и  $z_0 = \sum_{k=1}^M x_k$  стремятся к гауссовским с математическими ожиданиями  $N\beta_1$  и  $M\beta_0$ , и дисперсиями соответственно  $N\beta_1^2$  и  $M\beta_0^2$ .

Предельную задачу можно рассматривать, как различение гауссовских плотностей с неизвестными математическими ожиданиями и дисперсиями при функциональной связи дисперсии с математическим ожиданием. Дисперсии для каждой из гипотез пропорциональны своим математическим ожиданиям  $\sigma^2 = \beta \cdot m$ . Такая задача была рассмотрена в [2] для случая известных параметров.

Нетрудно видеть, что в данном случае начальный коэффициент вариации  $k_{v,0} = \sigma_0 / m_0 = 1 / \sqrt{N}$  уменьшается с увеличением  $N$ . Поэтому основной при различении данных гауссовских плотностей является линейная решающая статистика  $z_1$ , которая оптимальна и для исходной задачи.

При достаточно больших значениях  $N$  и  $M$  характеристики алгоритма  $z_1 \geq c \cdot z_2$  приближаются к характеристикам алгоритма с фиксированным порогом  $z_1 \geq c_T$  в случае известных параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$  [1, 2].

## **2.2. Различение пуассоновских потоков с неизвестными интенсивностями**

Случайные потоки событий или сигналов представляют важные модели наблюдений в радиотехнических задачах [18, 24]. Пусть наблюдаются два или больше случайных пуассоновских потоков с неизвестными интенсивностями. Требуется решить, имеют ли все они одинаковую интенсивность, или хотя бы один из потоков отличается по интенсивности от остальных.

Различение потоков в режиме счета событий (например, счета фотоэлектронов или квантов различных излучений) можно производить методом *прямой* выборки или методом *обратной* выборки.

В режиме *прямой выборки* (счета событий на фиксированном временном интервале) регистрируются  $k_0$  событий из одного потока за время  $T_0$  и  $k_1$  событий из другого потока за время  $T_1$ , т. е. наблюдением является совокупность отсчетов  $(k_0, k_1)$ .

Если предположить, что первый (опорный) поток имеет интенсивность  $\nu_0$ , а второй (анализируемый) – интенсивность  $\nu_1$ , причем значения интенсивностей неизвестны, то задача различения формулируется так: проверяется сложная гипотеза  $H_0: \nu_0 = \nu_1$ ,  $\nu_0$  – неизвестна, против односторонних сложных альтернатив  $H_1^{(1)}: \nu_1 > \nu_0$ ,  $H_1^{(2)}: \nu_1 < \nu_0$ , или двусторонней альтернативы  $H_1^{(3)}: \nu_1 \neq \nu_0$ . Проверка гипотезы  $H_1^{(2)}$  не отличается от проверки  $H_1^{(1)}$ , если опорный и анализируемый потоки поменять местами. Проверка двусторонней альтернативы представляется как одновременная проверка двух гипотез  $H_1^{(1)}$  и  $H_1^{(2)}$ .

Совместное распределение вероятностей отсчетов  $(k_0, k_1)$  имеет вид  $P(k_0, k_1) = (\nu_0 T_0)^{k_0} (\nu_1 T_1)^{k_1} \exp(-\nu_0 T_0 - \nu_1 T_1) / (k_0! k_1!)$ . Оно представляется в экспоненциальной форме с выделением «полезного» параметра  $\lambda = \ln(\nu_1 T_1 / \nu_0 T_0)$  и «мешающего» параметра  $\phi = \ln(\nu_0 T_0)$  и соответствующих достаточных статистик  $u = k_1$ ,  $v = k_1 + k_0$  [1]. Условное распределение  $u$  при фиксированном значении  $v$  есть *биномиальное* распределение  $p(u | v) = C_v^u p^u (1-p)^{v-u}$ ,  $0 \leq u \leq v$ , где  $p$  – параметр, имеющий значения от нуля до единицы,  $C_v^u$  – биномиальные коэффициенты.

Задача проверки гипотез формулируется теперь следующим образом:  $H_0: p = p_0$ ,  $H_1^{(1)}: p = p_1$ , где  $p_0 = T_1 / (T_1 + T_0)$  – известное значение, а  $p_1 = \nu_1 T_1 / (\nu_1 T_1 + \nu_0 T_0)$  – зависит от неизвестных интенсивностей потоков. Таким образом, проверяется гипотеза об изменении параметра биномиального распределения.

Оптимальное (рандомизированное) решающее правило  $\delta(u, v)$  сводится к сравнению с пороговой функцией  $L(v)$  статистики  $u$  [12, 14, 16]:

$$\delta(u, v) = 1 \text{ при } u > L(v); \quad \delta(u, v) = \gamma(v) \text{ при } u = L(v); \\ \delta(u, v) = 0 \text{ при } u < L(v).$$

Пороговые функции  $L(v)$  и  $\gamma(v)$  определяются из уравнения  $P_0(v) = M_0 \{ \delta(u, v) | v \} = F_0$ , где математическое ожидание  $M_0 \{ \cdot \}$  берется по распределению  $p_0(u | v)$  при гипотезе  $H_0$ , а  $F_0$  – заданное значение вероятности ложной тревоги.



Рандомизированное решающее правило включает случайный механизм принятия решения в случае, если  $u = L(v)$ . Решение в пользу  $H_1$  в этом случае принимается с вероятностью

$$\gamma(v) = [F_0 - P_0(v, L(v) + 1)] / [P_0(v, L(v)) - P_0(v, L(v) + 1)].$$

Фактически рандомизация требуется лишь при весьма слабых шумовых полях и малых интервалах наблюдения. На практике предпочтительнее построение нерандомизированного правила как более простого. В этом случае можно положить  $\gamma(v) = 1$  и потребовать ограничения вероятности ложной тревоги при всех значениях  $v$ .

Для реализации обнаружителя необходимо построить пороговую функцию  $L(v)$ , которая принимает целочисленные значения. При не очень больших значениях  $v$  она может быть получена точно [17].

Рассмотрим сначала случай одинаковых интервалов регистрации потоков  $T_1 = T_0$ , тогда  $p_0 = 1/2$ , и биномиальное распределение  $p_0(u | v)$  будет симметрично, а функция  $P_0(v) = (1/2^v) \sum_{i=L(v)}^v C_v^i$ .

Удобнее перейти к другой функции  $\alpha(v) = -\lg P_0(v)$ , которая равна  $\alpha(v) = v \lg 2 - \lg[1 + v + v(v-1)/2! + \dots + v(v-1)(v-2)\dots(l+1)/l!]$ , где  $l = v - L(v)$ . Графики функции  $\alpha(v)$  дискретного аргумента построены на рис. 2.2 для  $l = 0, 1, 2, 3, 4$  (точки соединены пунктиром). Они полезны для анализа режима счета событий (точек, фотоэлектронов) при малых значениях  $v_0 T_0$ . Верхняя ломаная линия соединяет значения функции  $\alpha(v)$ , обеспечивающие для  $v > 4$  граничное значение вероятности ложной тревоги  $\nu$ , т. е. ближайшие значения, удовлетворяющие условию  $\alpha(v) \geq 1$ . Эти точки выделены жирным.

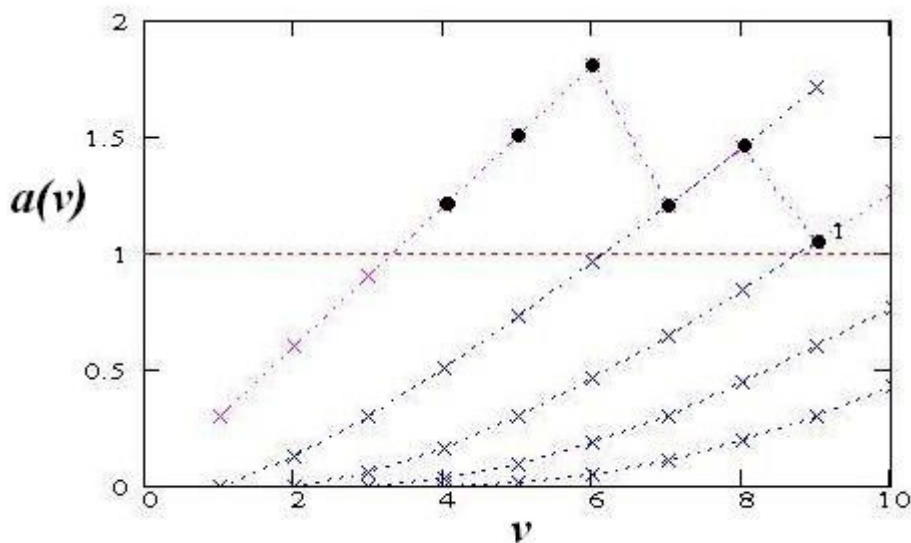


Рис. 2.2. Зависимость показателя степени вероятности ложной тревоги от значений статистики  $v$

Пороговая функция в данном случае определяется так:  $L(v) = v + 1$ , при  $v = 1, 2, 3$ ;  $L(v) = v$  при  $v = 4, 5, 6$ ;  $L(v) = v - 1$  при  $v = 7, 8$ ;  $L(v) = v - 2$  при  $v = 9, 10, 11$  и т. д. Другое значение  $F_0$  приведет к изменению вида пороговой функции.

Следует отметить, что значения пороговой функции  $L(v)$  в случае пуассоновских отсчетов будут существенно меньшими, чем для ряда других распределений шумовых полей (Бозе–Эйнштейна и др.), рассмотренных в [14, 18], и эти различия увеличиваются с ростом  $v$ .

При больших значениях  $v_0 T_0$ , которые будут указаны далее, условное распределение  $p_0(u | v)$  можно аппроксимировать гауссовским с соответствующими моментами. Пороговая функция приближенно представляется в виде  $L(v) \approx c_F \sqrt{p_0(1-p_0)} \cdot \sqrt{v} + p_0 v + 1/2$ . Наличие в пороговой функции членов, пропорциональных величинам  $v$  и  $\sqrt{v}$ , является особенностью задачи обнаружения при пуассоновской статистике отсчетов.

Пользуясь таблицами биномиального распределения из [13], можно установить, что абсолютная ошибка вычисления условной вероятности ложной тревоги  $P_0(v)$  при нормальной аппроксимации не превышает половины заданного значения  $F_0$ , если  $v$  больше некоторого значения  $v_F$ , которое при уменьшении  $F$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-6}$  изменяется в пределах 30...100.

Если значение  $v_0 T_0$  превышает уровень, для которого  $P(v \geq v_F) \geq 1 - F_0/2$ , то безусловная вероятность ложной тревоги

$$P_F \leq (1 - F_0/2)P_0(v \geq v_F) + (F_0/2)P_0(v < v_F) < P_0(v \geq v_F) + F_0/2 < F_0.$$

Таким образом, можно указать граничные значения  $v_0 T_0$ , начиная с которых безусловная вероятность ложной тревоги в худшем случае не превысит заданного значения  $F_0$ . Для  $F_0 = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$  граничные значения равны соответственно 24, 44 и 78.

При неравных значениях интервалов  $T_0$  и  $T_1$  распределение  $p_0(u | v)$  оказывается несимметричным и гауссовская аппроксимация для него может оказаться неудовлетворительной. Более точное приближение в этих случаях можно осуществить следующим образом (так называемый метод «подвешенной» переменной).

Вводится опорное распределение  $p_a(u | v)$ , которое в данном случае является биномиальным с фиксированным параметром  $p_a \neq p_0$ . Тогда любое другое биномиальное распределение  $p(u | v)$  представляется через опорное:

$$p(u | v) = A(p, p_a) p_a(u | v) \exp[(\theta - \theta_a)u], \text{ где } \theta = \ln[p/(1-p)],$$

$\theta_a = \ln[p_a/(1-p_a)]$ ,  $A(p, p_a) = [(1-p)/(1-p_a)]^v$ . Это представление легко проверить подстановкой  $p_a(u | v)$ . Теперь выбором  $p_a = 1/2$  можно обеспечить симметрию «опорного» распределения, которое затем аппроксимируется гауссовским распределением.

Решение уравнения  $P_0(v) = F_0$  приводит к выражению  $L(v) \approx c'_{F_1}(v)\sqrt{v}/2 + (1 + \theta/2)v/2$ , где  $c'_{F_1}(v)$  есть  $100 \cdot F_1$ -процентная точка нормального распределения, зависящая от значения  $v$ . Значение  $F_1(v)$  отличается от требуемого значения  $F_0$  и само нелинейно зависит от  $v$ :  $F_1(v) = F_0(1 - p)^{-v} 2^{-v} \exp[-v(\theta + \theta^2/4)/2]$ . Заметим, что при значении  $p_0 = 1/2$   $F_1(v) = F_0$ , так как  $\theta = 0$ . Предложенный метод вычисления пороговой функции не исключает использования более точной, чем гауссовская, аппроксимации для опорного распределения  $p_a(u | v)$ .

Для расчета вероятности правильного обнаружения необходимо усреднить условную вероятность

$$P_1(v) = M_1\{\delta(u, v) | v\} = \sum_{u=L(v)}^v C_v^u p_1^u (1 - p_1)^{v-u} = I_{p_1}(L(v), v - L(v) + 1),$$

где  $I_x(a, b)$  – функция В-распределения, по соответствующему распределению статистики  $v$ , которое является пуассоновским с параметром  $v_0 T_0 + v_1 T_1$ .

Если величина  $v_0 T_0$  превышает указанное выше граничное значение, то можно пользоваться нормальным приближением распределения  $p(u | v)$  при гипотезе  $H_1$ . В этом случае  $P_1(v) \approx 1 - \Phi(c_D)$ , где

$$c_D = c_F \sqrt{p_0(1 - p_0)} / \sqrt{p_1(1 - p_1)} - (p_1 - p_0)\sqrt{v} / \sqrt{p_1(1 - p_1)}.$$

Отсюда следует, что условная вероятность правильного обнаружения зависит от  $\sqrt{v}$ . В качестве параметра обнаружения можно использовать относительное изменение интенсивности  $\delta = (v_1 - v_0) / v_0$ , а также дефлекцию статистики  $k_1$ , равную  $d = (v_1 T_1 - v_0 T_0) / \sqrt{v_0 T_0} = \sqrt{v_0 T_0} [(1 + \delta)(T_1 / T_0) - 1]$ . Она зависит от  $\delta$  и пропорциональна корню квадратному из  $v_0$ .

Для пороговой дефлекции  $d^{(0,5)}$ , которая обеспечивает вероятность правильного обнаружения  $D = 0,5$ , из условия  $c_D = 0$  получается следующее соотношение:

$$c_F \sqrt{p_0(1 - p_0)} = (p_1 - p_0)\sqrt{v}.$$

Оно зависит от значения статистики  $v$ . Можно показать, что математическое ожидание величины  $\sqrt{v}$  равно  $M\{v^{1/2}\} \approx m_v^{1/2} - 1/(8m_v^{1/2}) \approx m_v^{1/2}$ , где  $m_v = v_0 T_0 + v_1 T_1$  – математическое ожидание статистики  $v$ . Тогда соотношение принимает вид

$$c_F \sqrt{1 + (1 + d^{(0,5)} / \sqrt{v_0 T_0})(T_1 / T_0)} = d^{(0,5)} \sqrt{T_1 / T_0}.$$

При достаточно больших  $\lambda_0 = v_0 T_0$ , таких, что  $d^{(0,5)} / \sqrt{v_0 T_0} \ll 1$ , пороговая дефлекция  $d^{(0,5)} = c_F \sqrt{1 + T_0 / T_1}$ . Если интервалы наблюдений одинаковы ( $T_1 = T_0$ ), то  $d^{(0,5)} = c_F \sqrt{2}$ , и пороговая дефлекция возрастает в  $\sqrt{2}$  раза по сравнению со случаем известной интенсивности и одноканального приема [1, 2]. Уменьшение  $T_1$  при постоянном значении  $T_0$  соответствует

уменьшению интервала наблюдения анализируемой выборки и вызывает существенное возрастание пороговой дефлексии.

Рассмотрим метод или режим *обратной* выборки, который также используется при регистрации потока событий. При этом время наблюдения не фиксируется, а является случайной величиной. Результатами наблюдений являются случайные интервалы времени  $\tau_1$  и  $\tau_0$ , обеспечивающие появление заданных чисел  $N_1$  и  $N_0$  отсчетов каждого из потоков. Совместная плотность вероятности

$$w(\tau_1, \tau_2) = v_0^{N_0} v_1^{N_1} \tau_0^{N_0-1} \tau_1^{N_1-1} \exp(-v_1 \tau_1 - v_0 \tau_0) / (N_1 - 1)! (N_0 - 1)!$$

представляется в экспоненциальной форме, причем совокупность параметров  $\lambda = v_0 - v_1$  и  $\phi = -v_0$  характеризуется совокупностью достаточных статистик  $u = \tau_1$  и  $v = \tau_1 + \tau_0$ .

Проверяется гипотеза  $H_0 : \lambda = 0$  против альтернативы  $H_1^{(1)} : \lambda < 0$  при неизвестном мешающем параметре  $\phi < 0$ . Условное распределение статистики  $u$  при фиксированном значении  $v$  имеет вид

$$w(u | v) = u^{N_1-1} (v-u)^{N_0-1} \exp(\theta u) / \int_0^v u^{N_1-1} (v-u)^{N_0-1} \exp(\theta u) du.$$

Равномерно наиболее мощное несмещенное решающее правило предписывает сравнение статистики  $u$  с пороговой функцией  $L(v)$ :

$$\delta(u, v) = 1 \text{ при } u \leq L(v); \quad \delta(u, v) = 0 \text{ при } u < L(v).$$

При гипотезе  $H_0$  можно получить выражение для условной вероятности ложной тревоги  $P_0(v) = \int_0^{L(v)} w_0(u | v) du = I_\alpha(N_1, N_0)$ , где  $I_\alpha(N_1, N_0)$  – функция В-распределения с индексом  $\alpha = L(v)/v$ , который зависит от значения  $v$ .

Вероятность ложной тревоги не зависит от неизвестной интенсивности  $v_0$ , а определяется величинами  $N_1$ ,  $N_0$  и  $\alpha$ . Если значение  $\alpha(F, N_1, N_0)$  соответствует  $F$ -квантили В-распределения, то пороговая функция равна  $L(v) = v \cdot \alpha(F, N_1, N_0)$ , т. е. прямо пропорциональна значению  $v$ .

Решающее правило принимает следующий вид: если  $\tau_1 \leq c \cdot \tau_0$ , то принимается гипотеза  $H_1^{(1)}$ , если  $\tau_1 > c \cdot \tau_0$ , то принимается  $H_0$ . Здесь пороговая постоянная равна  $c = \alpha / (1 - \alpha)$ . Алгоритм обеспечивает стабилизацию вероятности ложной тревоги при изменениях неизвестной интенсивности шумового потока  $v_0$ .

Заметим, что  $2v_0\tau_0$  и  $2v_1\tau_1$  имеют распределения хи-квадрат соответственно с  $2N_0$  и  $2N_1$  степенями свободы. Это вытекает из свойств пуассоновских потоков. Задача обнаружения различий этих двух распределений практически совпадает с уже рассмотренной здесь для случая экспоненциального распределения.

Отношение  $\xi = N_0 v_1 \tau_1 / N_1 v_0 \tau_0$  будет иметь  $F$ -распределение с параметрами  $2N_1$  и  $2N_0$ , поэтому вероятность правильного обнаружения можно выразить через функцию  $F$ -распределения, или через функцию бета-

распределения [13]:  $D = G(\xi_T; 2N_1, 2N_0) = I_\beta(N_1, N_0)$ , где  $G(\cdot; \cdot, \cdot)$  – функция  $F$ -распределения,  $\xi_T = N_0(1 + \delta)c / N_1$  – порог, а значение индекса  $\beta = c(1 + \delta) / [1 + c(1 + \delta)] = \alpha(1 + \delta) / (1 + \alpha\delta)$ .

При слабых интенсивностях пуассоновских потоков, а также для малых интервалов наблюдения представляет интерес случай, когда  $N_1 = N_0 = 1$ , т. е. измеряются интервалы времени до первых отсчетов каждого из процессов. Задача соответствует различению двух экспоненциальных распределений с неизвестными интенсивностями. Тот факт, что обнаруживается уменьшение параметра масштаба, не является существенным, поскольку временные интервалы можно поменять местами. В данном случае дефлексия равна относительному изменению интенсивности  $\delta$ , значения  $\alpha = F_0$ ,  $c = F_0 / (1 - F_0)$ , а вероятность правильного обнаружения равна  $D = F_0(1 + \delta) / (1 + \delta \cdot F_0)$ .

Как показывает анализ, прямой метод счета событий и метод обратной выборки оба обеспечивают стабилизацию вероятности ложной тревоги при изменениях интенсивности шумового потока, и почти одинаковое качество обнаружения сигнала при одном и том же  $\delta$ , если  $N_1 \approx \nu_0 T_1$ . Потери вследствие незнания интенсивности шумового потока для больших значений  $N_1$  и  $\nu_0 T_1$  также примерно одинаковы и составляют 1,5 дБ при  $T_1 = T_0$  и  $N_1 = N_0$ .

### 2.3. Обнаружение изменения параметра формы гамма-распределения

Двухпараметрическое семейство гамма-распределений имеет плотность  $f(y) = y^{\alpha-1} \exp(-y/\beta) / (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))$ , где  $\alpha > -1$  – параметр формы,  $\beta > 0$  – параметр масштаба. Распределения из этого семейства применяются для описания помех и флуктуирующих сигналов на выходе амплитудного детектора. В случае приема оптических импульсов фотоприемником, работающим в токовом режиме, выборочные значения выходного тока имеют гамма-распределение, причем параметр формы пропорционален интенсивности потока фотоэлектронов [18, 20].

Будем считать, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  неизменны для всех выборочных значений независимой выборки  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ . При отсутствии полезного сигнала (гипотеза  $H_0$ ) значение  $\alpha_0$  определяется интенсивностью фона, а появление сигнала (гипотеза  $H_1$ ) вызывает увеличение параметра формы до значения  $\alpha_1 = \alpha_0(1 + \delta)$ , где  $\delta$  есть относительное изменение параметра.

Задача обнаружения сигнала сводится к проверке гипотезы  $H_0: \delta = 0$  против альтернативы  $H_1: \delta > 0$ . При неизвестной интенсивности фона  $\alpha_0$  выступает как мешающий параметр. Если также неизвестен параметр масштаба  $\beta$ , то в задаче будет два мешающих параметра.

Рассмотрим алгоритмы обнаружения для четырех случаев:

1. Значения  $(\alpha_0, \beta)$  известны. Перейдем к нормированной выборке  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ , где  $\xi_k = y_k / \beta$ . Оптимальный алгоритм обнаружения вытекает из отношения правдоподобия и представляется в виде  $U \geq U_T$ , где  $U = \sum_{k=1}^N \ln \xi_k / N$  – решающая статистика,  $U_T$  – фиксированный порог, который зависит от значений  $\alpha_0$  и  $\beta$ . Таким образом, оптимальная обработка включает накопление логарифмов выборочных значений на выходе приемника.
2. Значение  $\alpha_0$  известно,  $\beta$  – неизвестно. Равномерно наиболее мощное несмещенное решающее правило сводится к сравнению с порогом  $Z_T$  величины  $z = u - \ln v$ , где  $u = \sum_{k=1}^N \ln y_k / N$  и  $v = \sum_{k=1}^N y_k$  являются достаточными статистиками для полезного параметра  $\Delta = \alpha_1 - \alpha_0$  и мешающего  $\beta$ . Статистика  $u = \ln(\prod_{k=1}^N y_k^{1/N})$  равна логарифму *среднего геометрического* выборки, а  $\ln v - \ln N$  есть *среднее арифметическое*. Поскольку среднее геометрическое для любой выборки не больше среднего арифметического, то  $u \leq \ln v - \ln N$ . Отсюда следует, что  $z \leq -\ln N$ . Алгоритм  $z = u - \ln v$  обеспечивает вычитание неизвестного смещения плотности статистики  $u$ , а в структуре обнаружителя появляется дополнительный канал, позволяющий избавиться от неизвестного параметра масштаба, но вносящий потери в пороговых значениях параметра обнаружения  $\delta$ .
3. Значение  $\alpha_0$  неизвестно,  $\beta$  – известно. Оптимальное двухвыборочное несмещенное правило обнаружения использует анализируемую  $\{y_k\}$  и опорную (фоновую)  $\{x_k\}$  выборки, и имеет вид  $U \geq L(V)$ , где  $U = (1/N) \sum_{k=1}^N \ln(y_k / \beta)$ ,  $V = (1/N) \sum_{k=1}^N [\ln(y_k / \beta) + \ln(x_k / \beta)]$ , а пороговая функция  $L(V)$  находится из условия стабилизации вероятности ложной тревоги, т. е. как решение уравнения  $\int_{L(V)}^V W(U | V) dU = F$ .
4. Значения  $\alpha_0$  и  $\beta$  неизвестны. Для исключения их влияния осуществляется нормирующее преобразование  $z_k = x_k / (y_k + x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , после чего формируются инвариантные к параметру масштаба статистики  $u = -\sum_{k=1}^N \ln z_k / N$ ,  $v = -\sum_{k=1}^N \ln[z_k(1 - z_k)] / N$ , достаточные для параметров  $-N(\alpha_1 - \alpha_0)$  и  $-N\alpha_0$ . В данном случае алгоритм  $u \geq L(v)$  будет оптимальным в классе инвариантных относительно параметра масштаба выборок.

Явный вид пороговых функций в случаях 3 и 4 не найден, но можно использовать приближения для этих функций, вытекающие из метода аппроксимации плотностей. Получим расчетные выражения для исследования характеристик обнаружения рассматриваемых алгоритмов.

1. Для решающей статистики  $U$  можно записать характеристическую функцию  $\Theta_U(jt) = \Gamma^N(\alpha + jt/N) / \Gamma^N(\alpha)$  и определить кумулянты  $\kappa_1 = \psi(\alpha), \dots, \kappa_{k+1} = \psi^{(k)}(\alpha) / N^k, k > 1$  через пси-функцию (логарифмическую производную гамма-функции) и ее производные [19]. Осуществляя преобразование Фурье, получаем выражение для плотности вероятности

$$W(U) = G_1(U) \exp(\alpha NU) / \Gamma^N(\alpha).$$

Здесь функция  $G_1(U)$  не зависит от  $\alpha$ . Это означает, что плотность  $W(U)$  для заданного значения  $\alpha$  связана с плотностью  $W_a(U)$  для некоторого опорного значения  $\alpha_a$  выражением  $W(U) = A_1 \exp(-(\alpha_a - \alpha)NU) \cdot W_a(U)$ , где  $A_1 = \Gamma^N(\alpha_a) / \Gamma^N(\alpha)$ . Здесь используется метод так называемой «подвешенной» переменной.

Важно, что опорное значение  $\alpha_a$  может быть выбрано произвольно. Для определения порога обнаружения выбираем такое  $\alpha_a > \alpha_0$ , чтобы математическое ожидание  $m_1 = \psi(\alpha_a)$  плотности  $W_a(U)$  оказалось равным искомому значению порога  $U_T$ . В окрестности этой точки аргументов можно использовать различные аппроксимации для  $W_a(U)$ . Поскольку коэффициенты асимметрии и эксцесса убывают с ростом  $\alpha_a$  и  $N$ , анализ с целью упрощения может быть ограничен использованием гауссовского приближения для  $W_a(U)$  с параметрами  $m_1 = \psi(\alpha_a)$  и  $\sigma_1^2 = \psi'(\alpha_a) / N$ . После такого выбора  $\alpha_a$  плотность  $W(U)$  можно записать в виде

$W(U) \cong K_1(\alpha, \alpha_a) \varphi((U - \mu_1) / \sigma_1)$ , где  $\varphi(x) = \exp(-x^2 / 2) / \sqrt{2\pi}$  – стандартная гауссовская плотность,  $\mu_1 = m_1 - \sigma_1^2 N(\alpha_a - \alpha)$ ,  $K_1(\alpha, \alpha_a) = A_1 \exp(B_1 N)$ ,  $B_1 = (\alpha_a - \alpha) [\sigma_1^2 N(\alpha_a - \alpha) / 2 - m_1]$ .

Вероятность ложной тревоги при гипотезе  $H_0$  с учетом того, что  $m_1 = U_T$ , равна

$$F = P\{U \geq U_T \mid \alpha = \alpha_0\} \cong K_1(\alpha_0, \alpha_a) [1 - \Phi(\sqrt{N\psi'(\alpha_a)}(\alpha_a - \alpha_0))],$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-z^2 / 2) dz / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности.

Вероятность правильного обнаружения равна

$$D = P\{U \geq U_T \mid \alpha = \alpha_1\} \cong K_1(\alpha_1, \alpha_a) \Phi(\sqrt{N\psi'(\alpha_a)}(\alpha_1 - \alpha_a)).$$

Отсюда могут быть получены пороговые значения  $\delta^{(D,F)} = (\alpha_1 - \alpha_0) / \alpha_0$ , обеспечивающие заданные характеристики обнаружения. В частности, вероятность правильного обнаружения  $D = 0,5$  достигается при  $\delta^{(0,5)} = (\alpha_a - \alpha_0) / \alpha_0$ .

2. Плотность  $W(u)$  имеет те же кумулянты, что и  $W(U)$ , за исключением математического ожидания  $m_u = \psi(\alpha) + \ln \beta$ . Неизвестная величина  $\ln \beta$

оказывается мешающим параметром сдвига плотности  $W(u)$ , что не позволяет использовать обнаружитель с постоянным порогом.

Запишем совместную характеристическую функцию  $u$  и  $v$

$$\Theta_{u,v}(jt) = [\beta^{\alpha+1} \Gamma(jt_1 + \alpha + 1) / (\Gamma(\alpha + 1)(\beta - jt_2)^{j t_1 + \alpha + 1})]^N.$$

Далее можно получить условную плотность  $W(u|v)$ , не зависящую от параметра  $\beta$ , в виде  $W(u|v) = (\Gamma(\alpha N) / \Gamma^N(\alpha)) G_2(u, v) \exp[\alpha N(u - \ln v)]$ , где функция  $G_2(u, v)$  не зависит от параметра  $\alpha$ .

Вводя опорную плотность  $W_a(u|v)$  для значения  $\alpha_a$ , выбор которого обеспечивает ее удовлетворительную аппроксимацию гауссовской плотностью, получаем  $W(u|v) = A_1 A_2 \exp[-(\alpha - \alpha_a) N(u - \ln v)] \cdot W_a(u|v)$ , где  $A_2 = \Gamma(N\alpha) / \Gamma(N\alpha_a)$ , а  $W_a(u|v)$  имеет математическое ожидание  $m_2 = \psi(\alpha_a) - \psi(N\alpha_a)$  и дисперсию  $\sigma_2^2 = \psi'(\alpha_a) / N - \psi'(N\alpha_a)$ .

Переходя к решающей статистике  $z$ , получаем аппроксимацию ее плотности при больших  $N$

$$W(z) \cong K_2(\alpha, \alpha_a) \varphi((z - \mu_2) / \sigma_2),$$

где  $\mu_2 = \sigma_2^2 N(\alpha_a - \alpha) - m_2$ ,

$$K_2(\alpha, \alpha_a) = A_1 A_2 \exp(B_2 N),$$

$$B_2 = (\alpha_a - \alpha) [\sigma_2^2 N(\alpha_a - \alpha) / 2 - m_2].$$

Выбором  $\alpha_a$  можно обеспечить  $Z_T = -m_2$ , тогда

$$F \cong K_2(\alpha_0, \alpha_a) [1 - \Phi(\sigma_2^2 N(\alpha_a - \alpha_0))] \text{ и } D \cong K_2(\alpha_1, \alpha_a) \Phi(\sigma_2^2 N(\alpha_1 - \alpha_a)).$$

Расчеты для  $\alpha_0 = 1$  показывают, что даже при больших  $N$  потери в пороговом параметре обнаружения  $\delta^{(0,5)}$  довольно значительны и составляют 6...7 дБ. Их уменьшение возможно с использованием двухвыборочных алгоритмов обнаружения с опорной выборкой, содержащей только шум.

### 3. Совместная характеристическая функция для $(U, V)$ при наличии сигнала

$$\Theta_{U,V}(t_1, t_2) = [\Gamma(\alpha_1 + j(t_1 + t_2) / N) \Gamma(\alpha_0 + j t_2 / N) / (\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_0))]^N.$$

Обратное преобразование Фурье приводит к выражению для совместной плотности при гипотезе  $H_1$

$$W_1(U, V) = [\Gamma(\alpha_0) \Gamma(\alpha_1)]^{-N} \exp(\Delta N U + \alpha_0 N V) G(U, V - U),$$

где функция  $G(U, V - U)$  симметрична по аргументам и не зависит от значений  $\alpha_1, \alpha_0$ . Полагая  $t_1 = 0$ , находим плотность статистики  $V$

$$W_1(V) = [\Gamma(\alpha_0) \Gamma(\alpha_1)]^{-N} \exp(\alpha_0 N V) G_\Delta(V),$$

где функция  $G_\Delta(V)$  зависит от  $\alpha_1$ , и  $\alpha_0$  лишь через их разность  $\Delta = \alpha_1 - \alpha_0$ . Условная плотность

$$W_1(U|V) = W_1(U, V) / W_1(V) = \exp(\Delta N U) G(U, V - U) / G_\Delta(V)$$

не зависит от мешающего параметра  $\alpha_0$ . Для ее определения можно использовать аппроксимации плотностей  $W_1(U, V)$  и  $W_1(V)$ , кумулянты



которых вычисляются для произвольного значения  $\alpha_0$ , удобного для расчетов. При больших  $N$  и для  $\Delta = 0$  в первом приближении имеем

$$W_0(U | V) \cong (2\pi\sigma_*^2 / N)^{-1/2} \exp[-N(U - V/2)^2 / 2\sigma_*^2],$$

где  $\sigma_*^2 = \psi'(\alpha_*)/2$  вычисляется в точке  $\alpha_*$ , которая находится из уравнения  $\psi(\alpha_*) = V/2$ . Величина  $\sigma_*^2$  нелинейно зависит от  $V$  и уменьшается при увеличении  $V$ . В результате пороговая функция  $L(V) \approx V/2 + c_F \sigma_* / \sqrt{N}$  также нелинейно зависит от  $V$ . Здесь  $c_F$  –  $(100 \cdot F)$ -процентная точка нормального распределения.

Для вычисления  $W_1(U | V)$  используем представление

$$W_1(U | V) = (\Gamma(\alpha_0) / \Gamma(\alpha_0 + \Delta))^N W_0(U, V) \exp(\Delta NU) / W_1(V).$$

Вводя плотность  $W_0^a(U, V)$  для опорного значения  $\alpha_a$ , получаем

$$W_0(U, V) = (\Gamma(\alpha_a) / \Gamma(\alpha_0))^{2N} \exp[-(\alpha_a - \alpha_0)NV] \cdot W_0^a(U, V).$$

Окончательно имеем

$$W_1(U | V) = A_3 \exp(\Delta NU - (\alpha_a - \alpha_0)NV) / W_0^a(U | V) W_0^a(V) / W_1(V),$$

где  $A_3 = [\Gamma^2(\alpha_a) / (\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_0))]^N$ .

При фиксированных значениях  $V = V_0$  и  $\Delta$  можно выбрать  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_a$  так, чтобы математические ожидания плотностей  $W_0^a(V)$ ,  $W_1(V)$  оказались равными  $V_0$ . Для этого надо решить уравнение  $V_0 = 2\psi(\alpha_a) = \psi(\alpha_0) + \psi(\alpha_1)$ .

Для больших  $N$  применимы гауссовские аппроксимации для плотностей  $W_0^a(V)$  и  $W_1(V)$  [20], тогда их отношение будет равно  $A_4 = \sigma_3 / \sigma_a$ , где  $\sigma_3^2 = [\psi'(\alpha_1) + \psi'(\alpha_0)] / N$ , а  $\sigma_a^2 = 2\psi'(\alpha_a) / N$ .

4. Поскольку нормированные величины  $\{x_i\}$  имеют бета-распределение  $w(x) = B(\alpha_1, \alpha_0)x^{\alpha_0-1}(1-x)^{\alpha_1-1}$ , где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $B(\alpha_1, \alpha_0) = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_0) / \Gamma(\alpha_0 + \alpha_1)$ , совместная характеристическая функция совокупности  $(u, v)$  для гипотезы  $H_1$ :

$$\Theta_{u,v}(t_1, t_2) = \left[ \frac{B(\alpha_1, \alpha_0) \Gamma(\alpha_0 - j(t_1 + t_2) / N) \Gamma(\alpha_1 - jt_2 / N)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_0 - jt_1 / N - jt_2 / N)} \right]^N.$$

Отсюда получаем совместную плотность

$$W_1(u, v) = [B(\alpha_1, \alpha_0)]^N \exp(-\Delta Nu - \alpha_1 Nv) G(u, v - u).$$

Плотность статистики  $v$  записывается в виде

$$W_1(v) = [B(\alpha_1, \alpha_0)]^N \exp(-\alpha_0 Nv) G_\Delta(v).$$

Математическое ожидание и дисперсия  $W_1(v)$  равны

$$m_4 = 2\psi(\alpha_1 + \alpha_0) - \psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_0), \quad \sigma_4^2 = [\psi'(\alpha_1) + \psi'(\alpha_0) - 4\psi'(\alpha_1 + \alpha_0)] / N.$$

Поскольку функции  $G(u, v-u)$  и  $G_{\Delta}(v)$  не зависят от мешающего параметра  $\alpha_0$ , то и условная плотность  $W_1(U|V)$  тоже не будет зависеть от него. Для расчетов пороговых функций и характеристик обнаружения приходится использовать гауссовские аппроксимации плотностей при больших  $N$ . Их можно рассматривать как первые приближения в рамках рассматриваемого метода. Более тонкие аппроксимации могут представлять практический интерес лишь при малом числе выборок.

Приведенные выражения позволяют рассчитать теоретические значения порогов и пороговых констант для приведенных алгоритмов обнаружения, а также значения пороговых дефлекций для обнаружения изменения параметра формы гамма-распределения [20].

### 3. ОБНАРУЖИТЕЛИ С АДАПТИВНЫМ ПОРОГОМ

#### 3.1. Обнаружитель с медленным порогом

Алгоритм обнаружения с медленным порогом использует для адаптации лишь предыдущие решения: решение на  $n$ -м шаге  $d_n = 1$  о наличии полезного сигнала принимается, если  $u_n \geq L_n(d_{n-1}, d_{n-2}, \dots)$ , в противном случае  $d_n = 0$ . При этом выборки в «помеховом» окне не участвуют в формировании порога, что снимает ряд проблем, связанных с неоднородностью помехи. Фактически алгоритм использует *обучение* по неклассифицированной выборке, т. е. *самообучение*.

Алгоритм можно переписать в виде  $d_n = \text{step}(u_n - L_n)$ , где  $L_n = L_n(d_{n-1}, d_{n-2}, \dots)$  – функция «медленного» порога,  $\text{step}$  – функция единичного скачка,  $n = 1, 2, \dots$  – номер шага. Решение  $d_n = 1$  приводит к появлению эталонного импульса на выходе пороговой схемы. В простейшем варианте самообучения [21] алгоритм включает рекуррентное формирование порога по формуле:  $L_{n+1} = L_n + a \cdot (d_n - \varepsilon_n)$ , где  $a$  – величина изменения порога на каждом шаге. Реализующая его структура включает элемент задержки на один шаг и приведена на рис. 3.1.

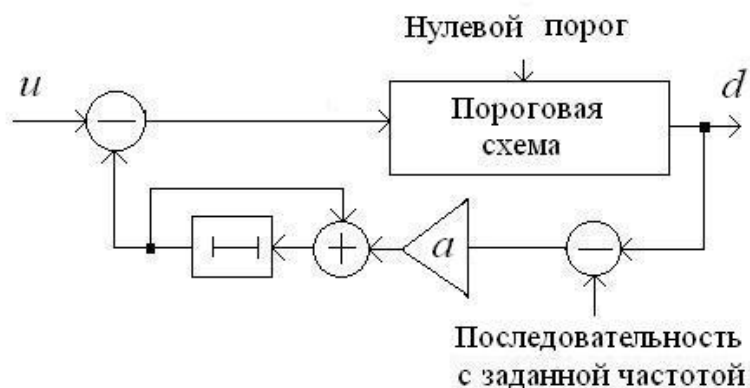


Рис. 3.1. Структура обнаружителя с медленным порогом

Последовательность с заданной частотой  $\{\varepsilon_n\}$  состоит из нулей и единиц, частота появления единиц в которой определяется заданной вероятностью ложной тревоги. Она реализуется как последовательность эталонных импульсов. В случае одновременного появления на  $n$ -м шаге двух импульсов  $d_n = 1$  и  $\varepsilon_n = 1$  их разность равна нулю, и изменения порога не происходит. Начальное значение порога  $L_0$  может быть задано произвольно.

Алгоритм обеспечивает автоматическую установку заданного значения  $F_0$  вероятности появления импульса на выходе обнаружителя (вероятности ложной тревоги при отсутствии полезного сигнала) при сравнительно медленных изменениях характеристик помехи.

Данная структура является устойчивой к виду одномерного распределения помехи, поскольку она включает знаковый алгоритм непараметрической оценки квантиля распределения решающей статистики  $u$  при отсутствии полезного сигнала. Появление полезного сигнала в виде редкого одиночного импульса практически не меняет значение оценки квантиля, так что алгоритм обнаружения эффективен при этом условии. При обработке потока сигнальных импульсов алгоритм реагирует на них так же, как и на помеховые импульсы, т. е. происходит рост порога в целях подавления этих импульсов, и алгоритм постепенно теряет чувствительность к обнаружению полезных сигналов.

В случае однородной по времени (стационарной) помехи алгоритм формирования порога сходится к соответствующему квантилю распределения. Переходный процесс занимает достаточно большое число шагов, которое зависит от начального значения порога  $L_0$  и от значений  $a$ . Выбор больших значений  $a$  позволяет ускорить процесс установки порога и адаптации, однако флуктуации порогового значения при этом возрастают. В случае малых значений  $a$  существенно увеличивается длительность процесса установления порога. Таким образом, значение  $a$  обычно выбирается из компромиссных соображений.

Нетрудно убедиться, что последовательность пороговых значений  $\{L_n\}$  представляет простую марковскую цепь с дискретным (счетным) множеством состояний. *Марковское* свойство формулируется как отсутствие «последствия»: если дано настоящее состояние системы, то никакие дополнительные сведения о состояниях системы в прошлом не влияют на условную вероятность будущих состояний [22].

Пусть  $P_n(L)$  – вероятность порогового значения  $L$  на  $n$ -м шаге,  $R_n(L)$  и  $Q_n(L)$  – вероятности переходов от значения порога  $L$  к  $L+a$  и  $L-a$  соответственно (вероятности увеличения или уменьшения порога).

Тогда при начальном значении порога  $L_0$  эволюция вероятностей для значений порога имеет вид [21]

$$P_{n+1}(L) = P_n(L-a)R_n(L-a) + P_n(L)[1 - R_n(L) - Q_n(L)] + P_n(L+a)Q_n(L+a),$$

причем  $P_0(L) = \delta(L - L_0)$  – дельта-функция. Для каждого из допустимых значений порога  $0 \leq L < \infty$  (с учетом дискретности значений) справедливо выражение  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(L) = 1$ , означающее возможность достижения этого значения порога при бесконечном числе шагов.

Вероятности  $R_n(L)$  и  $Q_n(L)$  для *стационарной* помехи не зависят от номера шага и могут быть вычислены, если известна плотность вероятности  $f_0(u)$  помехи. Вероятность  $R(L) = (1 - F_0) \cdot F(L)$  есть вероятность совмещения двух *независимых* событий  $\{d=1\}$  и  $\{\varepsilon=0\}$ , что вызывает увеличение порога на следующем шаге на величину  $a$ . Здесь  $F_0$  – заданное значение вероятности ложной тревоги, а  $F(L) = \int_L^{\infty} f_0(u) du$  есть (условная) вероятность ложной тревоги для фиксированного значения порога  $L$ .

Вероятность  $Q(L) = F_0 \cdot (1 - F(L))$  есть вероятность совмещения событий  $\{d = 0\}$  и  $\{\varepsilon = 1\}$ . В этом случае порог на следующем шаге уменьшается на  $a$ . Приведенные выражения позволяют численно рассчитать изменение вероятностей  $P_n(L)$  с ростом  $n$ , а затем вычислить безусловные вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения.

Для анализа переходного процесса можно перейти к непрерывному времени  $t = n \cdot \Delta t$ , где  $\Delta t$  – интервал временной дискретизации. Устремляя  $\Delta t$  и  $a$  к нулю так, что отношение  $a/\Delta t = g_0$  представляет определенную константу, можно перейти к плотности вероятности порога  $p(L, t)$  в момент времени  $t$ , и к дифференциальному уравнению в частных производных для этой плотности [21]  $\partial p(L, t)/\partial t = g \cdot \partial/\partial t[p(L, t)D(L)]$ , где  $D(L) = Q(L) - R(L)$ . Это уравнение с начальным условием  $p(L, t_0) = \delta(L - L_0)$  описывает непрерывный вариант самообучающегося алгоритма. Естественным ограничением является условие нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} p(L, t)dL = 1$  для всех значений  $t \geq t_0$ .

Решение уравнения для вероятности имеет вид  $p(L, t) = \delta\{L - V[g_0 \cdot (t - t_0)]\}$ , где функция  $V(z)$  описывает изменения математического ожидания порога от начального значения  $L_0$  до значения  $L$ . Функция  $V(z)$  удовлетворяет уравнению  $g_0 \cdot (t - t_0) = -\int_{L_0}^{V(z)} dv/D(v)$ .

При условии малости  $a$  по сравнению со стандартным отклонением распределения помехи функция  $V(t)$  достаточно хорошо описывает динамику изменения порога  $L$ . Соответствующие изменения с течением времени значения вероятности превышения этого порога (вероятности ложной тревоги)  $F(n) = P\{u_n \geq L_n\} = \sum_0 P_n(u_n \geq L_n | L_n = L) \cdot P_n(L)$  описываются функцией  $F(t) = \int_{V(t)}^{\infty} f_0(u)du$ , где  $f_0(u)$  – плотность вероятности решающей статистики при отсутствии полезного сигнала.

Пусть решающая статистика  $u = y$  совпадает с входным наблюдением. Для релеевского распределения огибающей помехи и квадратичного детектора плотность  $f_0(y)$  будет экспоненциальной  $E(\beta_0)$ . В этом случае  $D(L) = F_0 - \exp(-L/\beta_0)$ . После соответствующих вычислений [23] решение уравнения для функции  $V(t)$  получается в виде

$$V(t) = \beta_0 \ln \{ [1 - B \exp\{-g_0(t - t_0)F_0/\beta_0\}] / F_0 \}, \text{ где } B = 1 - F_0 \exp(-L_0/\beta_0).$$

Средняя (по значениям случайного порога) вероятность ложной тревоги  $F(t) = \exp\{-V(g_0 t)/\beta_0\}$  принимает вид

$$F(t) = F_0 [1 - B \exp\{-g_0(t - t_0)F_0/\beta_0\}]^{-1}.$$

Поскольку  $g_0 \cdot t = a \cdot n$ , то можно получить зависимость  $F(n)$  для вероятности ложной тревоги от номера шага, которая приведена на рис. 3.2 для  $F_0 = 10^{-2}$ ,  $L_0 = 0$ , и различных значений относительного изменения

порога  $a/\beta_0$ : кривая 1 соответствует  $a/\beta_0 = 1$ ; кривая 2 –  $a/\beta_0 = 0,1$ ; кривая 3 –  $a/\beta_0 = 0,01$ .

Из рисунка видно, что процесс установления порога при  $a/\beta_0 = 1$  занимает примерно 500 шагов. Меньшие значения относительного изменения порога увеличивают время адаптации. Переходные процессы такого характера могут возникать при скачкообразных изменениях характеристик помехи, например, интенсивности или вида распределения вероятностей.

Достоинством самообучающегося обнаружителя с «медленным» порогом является то, что заданный уровень вероятности ложной тревоги устанавливается при изменениях характеристик помех любого характера.

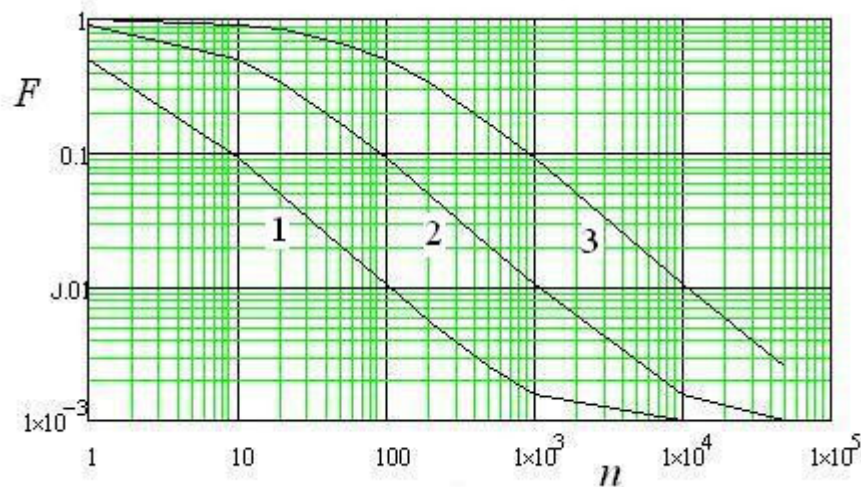


Рис. 3.2. Установление вероятности ложной тревоги к заданному уровню  $F_0 = 10^{-2}$  для  $a/\beta_0 = 1, 0,1, 0,01$

В этом смысле алгоритм обеспечивает асимптотическую инвариантность и подобие [2]. Однако процесс установления заданной вероятности ложной тревоги занимает достаточно большое время. Его можно уменьшить, если использовать дополнительную адаптацию по величине скачка порога  $a$ , увеличивая его при существенных изменениях, и уменьшая скачок порога при медленных изменениях параметров помехи.

Эта величина должна принимать большие значения в начальной стадии установки порога для сокращения времени установления, но затем уменьшаться в целях снижения уровня флуктуаций порога. Для реализации этой идеи было предложено комбинирование «быстрого» и «медленного» порогов [25].

Недостатком рассмотренного адаптивного обнаружителя является отсутствие селекции полезных сигналов, поэтому при большом потоке полезных сигналов они оказывают такое же действие, как помеховые импульсы, и в этом случае порог увеличивается, что приводит к подавлению сигнального потока. Алгоритм работает правильно при редких появлениях полезных сигналов по сравнению с потоком помеховых импульсов на выходе решающего устройства.

Несомненным достоинством алгоритма медленного порога является его инвариантность и непараметрическое свойство, т. е. способность обеспечивать стабилизацию вероятности ложной тревоги при существенных изменениях характеристик помех. Конечно, для адаптации в этом случае требуется значительное время, поэтому обычно медленный порог работает при покадровой обработке последовательности изображений.

### 3.2. Обнаружитель с порогом по среднему значению шума

Обнаружитель с порогом по среднему значению шума *A-Detector*  $y \geq c_1 z$ , где  $z = \sum_{k=1}^M x_k$ , а  $c_1$  – пороговая константа, является оптимальным (по критерию Неймана–Пирсона в классе несмещенных и подобных алгоритмов) в случае экспоненциального распределения  $E(\beta_0)$  помехи на выходе квадратичного амплитудного детектора:  $f_0(x) = (1/\beta_0) \exp(-x/\beta_0)$ . Считается, что на входе детектора с характеристикой  $x = U^2/2$  действует узкополосный гауссовский шум с огибающей  $U$  и средней мощностью (дисперсией)  $\beta_0$ .

При отсутствии полезного сигнала в сигнальном канале величина  $y$  имеет такое же распределение  $f_0(y)$ , а при появлении полезного сигнала распределение меняется в зависимости от характера амплитудных флуктуаций сигнала.

Используются следующие модели для распределения смеси сигнала с помехой на выходе детектора:

- распределение  $f_1(y) = (1/\beta_0) \exp[-(y+s)/\beta_0] \cdot I_0(2\sqrt{ys}/\beta_0)$ , для *нефлуктуирующего* сигнала, где  $s = U^2$ , а  $q = s/\beta_0$  есть отношение сигнал/шум по мощности *на входе* квадратичного детектора; распределение является *нецентральным экспоненциальным*  $E'(\beta_0; s/\beta_0)$  и представляет частный случай *нецентрального гамма-распределения*  $\Gamma'(1, \beta_0; A/\beta_0)$ .

- модель *Swerling I* *релеевских* флуктуаций амплитуды сигнала  $f(a) = (a/S) \exp(-a^2/2S)$  или экспоненциальной плотности  $f(s) = (1/S) \exp(-s/S)$ , где  $s = a^2/2$ , а  $S$  есть средняя мощность сигнала на входе детектора. В этом случае на выходе квадратичного детектора имеем экспоненциальное распределение  $f_1(y) = (1/\beta_1) \exp(-y/\beta_1)$ ,  $\beta_1 = \beta_0(1+d)$ , а  $d = (\beta_1 - \beta_0)/\beta_0 = S/\beta_0$  представляет *среднее* отношение сигнал/шум *на входе* детектора;

- модель *Swerling III* с плотностью  $f(a) = (2a^3/S^2) \exp(-a^2/S)$  для случайной амплитуды сигнала или  $f(s) = (4s/S^2) \exp(-2s/S)$  для мощности.

Рассчитаем характеристики обнаружения рассматриваемого обнаружителя. Условная вероятность ложной тревоги (при фиксированном значении  $z$ ) равна  $P(y \geq c_1 z | z, H_0) = P_0(z) = \int_{c_1 z}^{\infty} f_0(y) dy = \exp(-c_1 z / \beta_0)$ .

Вертикальная черта, как и ранее, отделяет условие. Случайная величина  $z$  имеет гамма-распределение  $w(z) \sim \Gamma(M, \beta_0)$ . Безусловная вероятность ложной тревоги вычисляется по формуле  $F = \int_0^\infty P_0(z)w(z)dz$  и равна  $F = (1 + c_1)^{-M}$ . Обозначив  $a = -\lg F$ , получаем формулу для расчета пороговой константы в виде  $c_1 = 10^{a/M} - 1$ .

Вероятность правильного обнаружения можно вычислить по формулам  $D = \int_0^\infty w(z)(\int_{c_1 z}^\infty f_1(y)dy)dz$  или  $D = 1 - \int_0^\infty f_1(y)(\int_{y/c_1}^\infty w(z)dz)dy$ . Внутренний интеграл в первом выражении представляет условную (при фиксированном пороге) вероятность правильного обнаружения  $P(y \geq c_1 z | z, H_1) = P_1(z) = \int_{c_1 z}^\infty f_1(y)dy$ , которая зависит от модели флуктуаций полезного сигнала.

Если учесть, что  $\hat{\beta}_0 = (1/M) \cdot \sum_{k=1}^M x_k$  есть эффективная оценка неизвестного параметра масштаба  $\beta_0$  (интенсивности шума), то алгоритм приводится к виду  $y \geq C_1 \cdot \hat{\beta}_0$ , где коэффициент  $C_1 = c_1 \cdot M$ . Для известного значения  $\beta_0$  фиксированный порог по критерию Неймана–Пирсона [1, 2, 17] принимает значение  $y_{NP} = C_0 \cdot \beta_0$ , где  $C_0 = a/\lg e$ . Нетрудно убедиться, что вследствие флуктуаций оценки  $\hat{\beta}_0$  адаптивный порог имеет большую пороговую константу, чем фиксированный, т. е.  $C_1 > C_0$  для одного и того же значения  $a = -\lg F$ .

Для модели флуктуаций сигнала *Swerling I* условная вероятность правильного обнаружения  $P_1(z) = \exp[-c_1 z / \beta_0 (1 + d)]$ , поэтому вероятность правильного обнаружения рассчитывается по формуле  $D = (1 + c_1 / (1 + d))^{-M}$ . Обозначив  $b = -\lg D$ , можно рассчитать пороговую дефлекцию решающей статистики  $y$  в виде  $d^{(D,F)} = c_1 / (10^{b/M} - 1) - 1 = (10^{a/M} - 10^{b/M}) / (10^{b/M} - 1)$ .

Заметим, что в случае фиксированного порога [1, 9, 17] в задаче обнаружения изменения масштаба экспоненциального распределения характеристики обнаружения имеют вид  $D = F^{1/(1+d)}$ , а пороговая дефлекция  $d_0^{(D,F)} = a/b - 1$ . Сравнительные характеристики обнаружения алгоритма с адаптивным порогом (сплошные кривые) и с фиксированным порогом (штрих-пунктир) приведены на рис. 3.3.

В случае адаптивного порога число помеховых выборок было равно  $M = 8$ . Вероятности ложной тревоги равнялись  $F = 10^{-2}$  (кривые 1),  $F = 10^{-3}$  (кривые 2) и  $F = 10^{-4}$  (кривые 3). Заметим, что проигрыш алгоритма с адаптивным порогом обнаружителю с фиксированным порогом является платой за адаптацию. При изменениях параметра масштаба адаптивный алгоритм стабилизирует вероятность ложной тревоги, тогда как обнаружитель с фиксированным порогом не обладает непараметрическим свойством и фактически неработоспособен.



Пороговые дефлекции для решающей статистики  $y$  в децибелах для уровня  $D = 0,9$ , (т. е. при значении  $b = 0,046$ ), приведены на рис. 3.4 в зависимости от показателя степени  $a = -\lg F$  вероятности ложной тревоги для значений  $M = 6, 10, 20, 100$  (кривые 1, 2, 3, 4).

Адаптивный порог при известных параметрах помехи проигрывает фиксированному порогу, пороговые дефлекции для которого показаны кривой с нулевым номером.

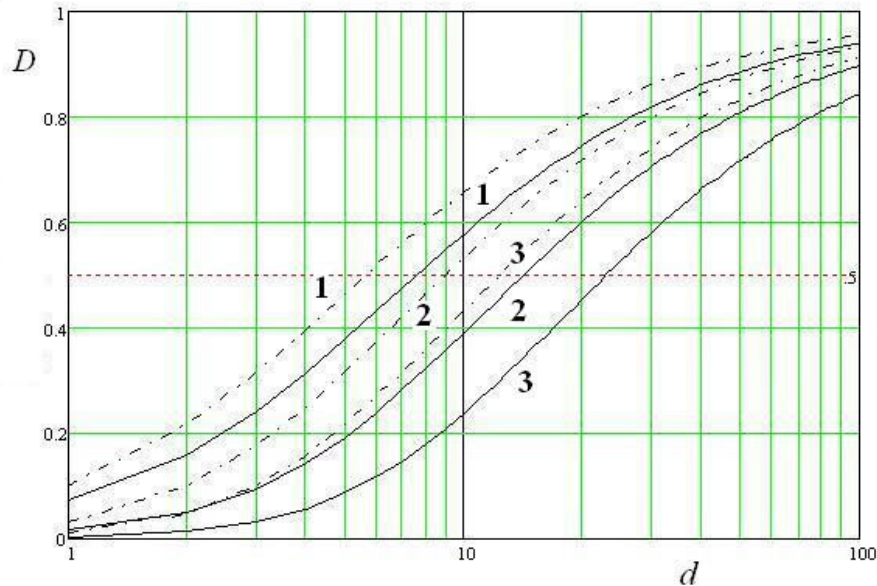


Рис. 3.3. Характеристики обнаружения алгоритма  $A$ -Detector с адаптивным порогом (сплошные линии) в сравнении с алгоритмом с фиксированным порогом (штрих-пунктир) при  $M=8$

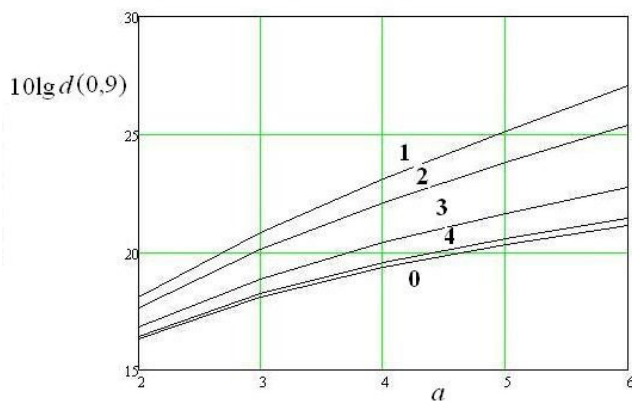


Рис. 3.4. Пороговые дефлекции для обнаружителя с адаптивным порогом при различных значениях  $M$ , в дБ

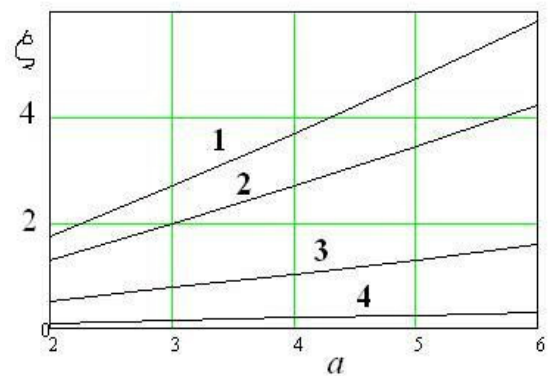


Рис. 3.5. Потери в пороговых дефлекциях для обнаружителя с адаптивным порогом, в дБ

На рис. 3.5 показаны зависимости потерь  $\zeta = 10\lg(d^{(D,F)} / d_0^{(D,F)})$  в децибелах. Для сравнения потерь выбран уровень 0,9 вероятности правильного обнаружения. Хорошо видна линейная зависимость потерь в децибелах от показателя степени вероятности ложной тревоги. При

достаточно большом количестве опорных выборок помехи  $M$  потери обнаружителя с адаптивным порогом при обнаружении изменения масштаба экспоненциального шума оказываются незначительными.

Для модели *нефлуктуирующего* полезного сигнала при расчетах целесообразно использовать второе выражение  $D = 1 - \int_0^\infty f_1(y) (\int_{y/c_1}^\infty w(z) dz) dy$ .

Внутренний интеграл равен  $\exp[-y/(c_1\beta_0)] \cdot \sum_{k=0}^{M-1} (y/c_1\beta_0)^k / k!$ . Используя интеграл  $\int_0^\infty t^n \exp(-t) I_0(2\sqrt{t\xi}) dt = n! \exp(\xi) L_n(-\xi)$ , где  $L_n(x)$  – полиномы Лагерра (нулевого порядка):  $L_0(x) = 1$ ,  $L_1(x) = 1 - x$ ,

$$n! L_n(x) = (-x + 2n - 1) L_{n-1}(x) - (n-1) L_{n-2}(x) \text{ для } n \geq 2.$$

При задании полиномов могут применяться различные нормировки. В данном случае коэффициент при старшей степени равен  $1/n!$ . Другая нормировка предусматривает единичные коэффициенты при старших степенях. Расчетное выражение для вероятности правильного обнаружения имеет вид  $D = 1 - c_1 \exp[-q/(1+c_1)] \cdot \sum_{k=0}^{M-1} L_k(-\xi)/(1+c_1)^{k+1}$ , где  $\xi = qc_1/(1+c_1)$ . Метод расчета предложен в [6].

Нетрудно убедиться, что в случае нефлуктуирующего сигнала качество обнаружения несколько лучше, чем для флуктуирующего. Различие в характеристиках примерно такое же, как и для обнаружителей с постоянным порогом.

Обнаружитель с адаптивным порогом по среднему значению шума является одним из самых простых алгоритмов обнаружения в условиях неизвестной интенсивности шума. Он использует среднее арифметическое в качестве оценки неизвестного параметра шума. Известно, что среднее арифметическое не является устойчивой оценкой, поэтому обнаружитель не обладает свойством устойчивости характеристик к изменению плотности вероятности шума. Для увеличения робастности применяются различные методы цензурирования. Один из таких методов предполагает отбрасывание крайних значений шума при усреднении. Алгоритм также весьма неустойчив к неоднородности шумовой выборки. Особенно неприятно появление кромок помехи в пределах помехового окна. Кроме того, алгоритм теряет разрешающую способность при обнаружении близко расположенных сигналов, когда один из них попадает в пороговую статистику для другого, и возможно взаимное подавление обоих. Известны частные решения, снижающие влияние кромок и повышающие разрешающую способность, в частности, алгоритм Хаббарда и использование непараметрических статистик при формировании адаптивного порога.

### 3.3. Обнаружитель с порогом по максимальному значению шума

Алгоритм с порогом по максимальному значению шума из опорной выборки  $M$ -Detector имеет вид  $y \geq c_2 \cdot \max(x_1, x_2, \dots, x_M)$ , где  $c_2$  – пороговая константа. Алгоритм использует статистику экстремальных значений, которая имеет непараметрические свойства. В результате алгоритм

обеспечивает устойчивость вероятности ложной тревоги в классе распределений шума с произвольным распределением и неизвестным параметром масштаба. В этом смысле алгоритм является робастным. В случае  $c_2 = 1$  получаем знаковый алгоритм  $\sum_{k=1}^M \text{sgn}(y - x_k) \geq M$ , обладающий непараметрическими свойствами [2, 3], т. е. он стабилизирует вероятность ложной тревоги для любого распределения шума при условии однородности шумовой выборки. При этом вероятность ложной тревоги  $F = 1/(M + 1)$  зависит только от числа независимых шумовых выборок. Однако знаковый алгоритм требует большого числа выборок шума для малых значений вероятности ложной тревоги, и чувствителен к нарушению статистической однородности (появлению других сигналов и кромок в помеховом окне) и к корреляции внутри помеховой выборки.

В общем случае при  $c_2 \neq 1$  зависимость от распределения проявляется в меньшей степени, чем у алгоритма *A-Detector*, и алгоритм *M-Detector* можно назвать *квазинепараметрическим* (т. е. *почти* непараметрическим).

Рассмотрим случай экспоненциального распределения  $E(\beta_0)$  помехи  $f_0(x) = (1/\beta_0) \exp(-x/\beta_0)$ , что соответствует воздействию нормального шума на квадратичный амплитудный детектор.

Обозначим через  $z = \max(x_1, x_2, \dots, x_M)$  – экстремальную статистику. Вероятность обнаружения есть вероятность события  $y \geq c_2 z$ . Условная вероятность ложной тревоги (при фиксированном значении  $z$ ) равна

$$P(y \geq c_2 z | z, H_0) = P_0(z) = \int_{c_2 z}^{\infty} f_0(y) dy = \exp(-c_2 z / \beta_0).$$

Случайная величина  $z$  имеет распределение  $w(z) = M \cdot F_0^{M-1}(z) \cdot f_0(z)$ , где  $F_0(z)$  есть функция распределения, соответствующая плотности помехи  $f_0(z)$ . Для вычисления безусловной вероятности ложной тревоги удобнее воспользоваться формулой

$$F = \int_0^{\infty} f_0(y) \left( \int_0^{y/c_2} w(z) dz \right) dy = \int_0^{\infty} f_0(y) F_z^M(y/c_2) dy,$$

где  $F_z(\cdot)$  представляет функцию распределения статистики  $z$ .

Поскольку

$$F_z^M(y/c_2) = [1 - \exp(-y/c_2 \beta_0)]^M = \sum_{k=0}^M C_M^k (-1)^{M-k} \exp(-(M-k)y/c_2 \beta_0),$$

то безусловная вероятность ложной тревоги вычисляется по формуле

$$F = \int_0^{\infty} f_0(y) F_z^M(y) dy, \text{ и окончательно равна } F = \sum_{k=0}^M C_M^k (-1)^{M-k} [1 + (M-k)/c_2].$$

Пороговые константы  $c_2$  приведены в таблице для числа обучающих выборок  $M=10$ .

$F$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$c_2$	2,25	3,999	6,24	9,1	12,75

Вероятность правильного обнаружения можно вычислить по формулам  $D = \int_0^\infty w(z) (\int_{c_2 z}^\infty f_1(y) dy) dz$ , или  $D = 1 - \int_0^\infty f_1(y) (\int_{y/c_2}^\infty w(z) dz) dy$ . Внутренний интеграл в первом выражении  $P(y \geq c_1 z | z, H_1) = P_1(z) = \int_{c_2 z}^\infty f_1(y) dy$  представляет условную (при фиксированном пороге) вероятность правильного обнаружения, которая зависит от модели флуктуаций полезного сигнала.

Для модели флуктуаций сигнала *Swerling I* имеем  $P_1(z) = \exp(-c_2 z / \beta_1)$ , где  $\beta = \beta_0(1 + d)$ , а  $d$  есть отношение сигнал/шум по мощности на входе квадратичного детектора. Вероятность правильного обнаружения равна

$$D = \sum_{k=0}^M C_M^k (-1)^{M-k} [1 + (M - k)(1 + d) / c_2].$$

Характеристики обнаружения алгоритма с порогом по максимуму при  $M=10$  для модели *Swerling I* показаны на рис. 3.6 сплошными линиями: линия 1 для  $F = 10^{-2}$ , линия 2 – для  $F = 10^{-4}$ , линия 3 – для  $F = 10^{-6}$ . Для сравнения штрих-пунктиром приведены соответствующие кривые обнаружения для алгоритма с фиксированным порогом.

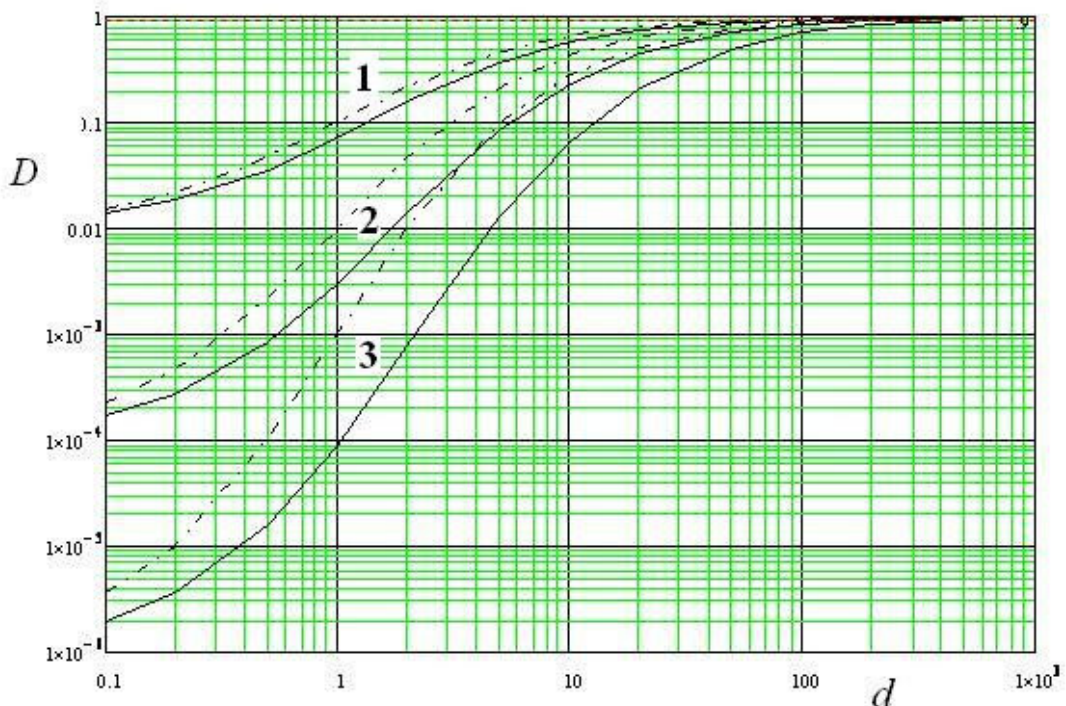


Рис. 3.6. Характеристики обнаружения *M-Detector* при  $M=10$

Пороговое отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора (пороговая дефлексия)  $d^{(D,F)}$  может быть рассчитана в зависимости от показателя степени  $a = -\lg F$ . Соответствующая кривая 1 для *M-Detector* при  $M = 10$  и  $D = 0,9$  изображена на рис. 3.7, где кривая 2 построена при тех же условиях для *A-Detector*, а кривая с нулевым номером построена для фиксированного порога.

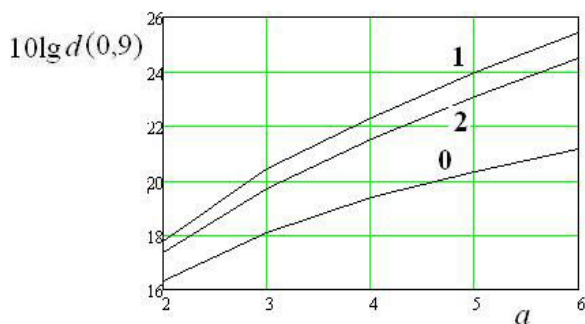


Рис. 3.7. Пороговые дефлекции  $M$ -Detector при  $M=10$ , в дБ

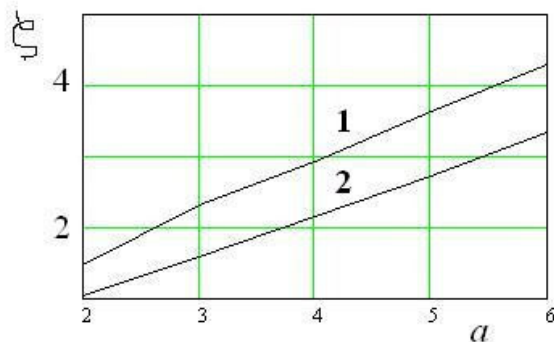


Рис. 3.8. Потери в пороговых дефлекциях  $M$ -Detector (кривая 1) и  $A$ -Detector (кривая 2), в дБ

На рис. 3.8 представлены потери в пороговой дефлекции в децибелах по уровню  $D = 0,9$  для различных значений  $a = -\lg F$  для  $M$ -Detector при  $M = 10$  по отношению к алгоритму с фиксированным порогом. Кривая 1 соответствует алгоритму  $M$ -Detector, а кривая 2 – алгоритму  $A$ -Detector.

Алгоритм с адаптивным порогом по максимальному значению шума оказывается достаточно эффективным и робастным при изменениях распределения шума в широких пределах. Его недостаток проявляется в необходимости использования больших размеров для помеховых окон в целях обеспечения достаточно большого числа обучающих выборок. Алгоритм весьма чувствителен к импульсной помехе в пределах помехового окна.

Как и алгоритм  $A$ -Detector, данный обнаружитель также не обеспечивает разрешающей способности при появлении других сигналов в непосредственной близости от сигнального окна. В этом случае может наступить взаимное подавление обоих сигналов.

Средствами устранения этих недостатков может быть использование предварительного цензурирования помеховой выборки в целях исключения нескольких первых максимальных значений, а также использование комбинированного порога, который включает другие статистики, например, комбинирование порогов  $M$ -Detector и  $A$ -Detector.

### 3.4. Обнаружители с комбинированным порогом

Комбинированный порог предполагает совместное использование нескольких статистик для формирования адаптивного порога. Рассмотрим комбинирование быстрого и медленного порогов. Это позволяет объединить их достоинства (малое время адаптации быстрого порога и непараметрические свойства медленного порога) и в какой-то мере компенсировать недостатки (чувствительность алгоритма с быстрым порогом к виду распределения и большое время адаптации медленного порога).

В случае комбинированного порога решение на  $n$ -м шаге о наличии полезного сигнала принимается, если  $u_n \geq L_n(v_n, d_{n-1}, d_{n-2}, \dots)$ , где функция  $L_n(\cdot)$  включает комбинацию быстрого и медленного порогов.

Для формирования быстрого порога в поле выборок обычно формируется *скользящее* окно, содержащее  $M+N$  выборок. При этом  $N$  выборок образует в сигнальное окно, а  $M$  опорных выборок, попадающие в помеховое окно, используются для формирования пороговой статистики  $z_n(x)$ . Сигнальное окно обычно имеет меньшие размеры и располагается в центре помехового.

Рассмотрим вариант обнаружителя [23] с единственной анализируемой выборкой в сигнальном окне, в этом случае  $N=1$ . Тогда  $u_n = y_n$ , и решающее правило имеет вид  $d_n = \text{step}(y_n - c_1 z_n \theta_n)$  или  $y_n \geq c_1 z_n \theta_n$ , где  $\theta_{n+1} = \theta_n + a_n \cdot (d_n - \varepsilon_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В отличие от медленного порога здесь осуществляется адаптация не самого порога, а безразмерного порогового множителя  $c_1 \theta_n$ . Для быстрого порога этот множитель представлял пороговую константу. Теперь он включает постоянный коэффициент  $c_1$  и переменный множитель  $\theta_n$ , который изменяется на каждом шаге на  $\pm a_n$  в зависимости от предыдущего решения  $d_n$  и значения опорной последовательности  $\varepsilon_n$  на  $n$ -м шаге.

В случае временных каналов в качестве опорных используются выборки, соседние с анализируемой выборкой. Функция  $z_n(y_{n-M/2}, \dots, y_{n-1}, y_{n+1}, \dots, y_{n+M/2})$  использует скользящее окно, из которого исключена анализируемая выборка  $y_n$ . Эта функция может содержать различные арифметические и логические операции, свойственные быстрому порогу, например, суммирование, выбор максимального значения, формирование выборочной медианы, частных сумм и т. д.

Пусть в качестве быстрого порога здесь используется суммирование опорных выборок, т. е. структура *A-Detector*:  $z_n = \sum_{k=-M/2-1}^{N/2+1} y_{n+k}$  при  $k \neq 0$ . Для *стационарной* шумовой помехи с *экспоненциальным* распределением условная (при фиксированной величине  $\theta_n = \theta$ ) вероятность ложной тревоги равна  $P(y_n \geq c_1 z_n \theta_n | \theta_n = \theta, H_0) = F_n(\theta) = (1 + c_1 \theta)^{-M}$ , где  $c_1$  – пороговая константа.

Перейдем (как и в разд. 3.1) к уравнению в частных производных для асимптотического анализа процесса установления порога от начального значения  $\theta_0$  до значения  $V$ , обеспечивающего заданное значение вероятности ложной тревоги  $F_0$ . При некоторых принятых ранее условиях получаем уравнение для функции  $V(t)$ , которая описывает динамику установления среднего значения порога  $\xi = g_0(t - t_0) = -\int_{\theta_0}^{V(\xi)} dv / D(v)$ , где  $D(\theta) = F_0 - (1 + c_1 \theta)^{-M}$  в случае, когда изменения множителя  $\theta_n$  от шага к шагу происходят на *постоянную* величину  $\pm a_0$ , где  $a_0 = g_0 \cdot \Delta t$ .

Результаты вычислений, приведенные на рис. 3.9 сплошными линиями, позволяют исследовать изменения порога от нулевого уровня до требуемого, и соответствующее установление вероятности ложной тревоги от значения  $F_0 = 1$  до  $F_0 = 10^{-3}$  для различных значений  $a_0 = 1, 0,1, 0,01$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Пороговая константа принималась равной  $c_1 = 0,995$ , что соответствует вероятности ложной тревоги  $F_0 = 10^{-3}$  в случае стационарной помехи с экспоненциальным распределением.

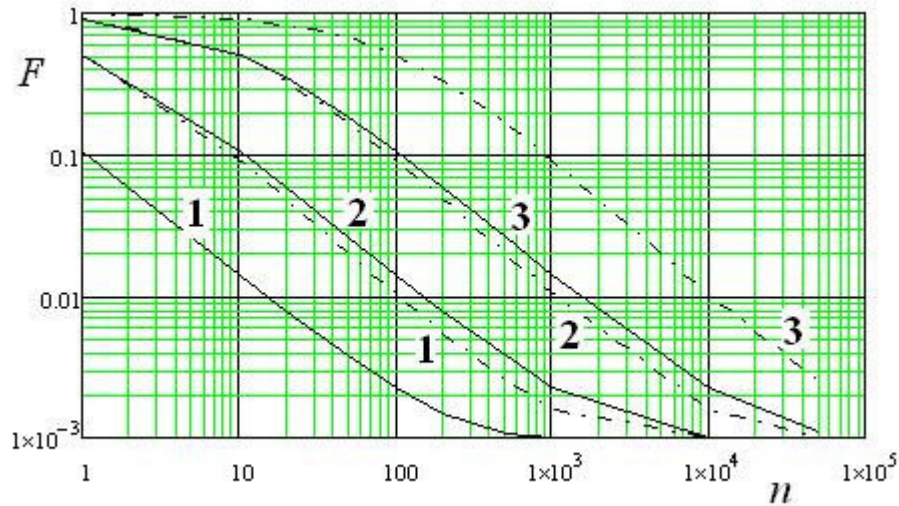


Рис. 3.9. Процесс установления вероятности ложной тревоги к значению  $F_0 = 10^{-3}$ ,  $a_0 = 1; 0,1; 0,01$ ,  $c_1 = 0,995$

Для сравнения штрих-пунктирными линиями показано установление вероятности ложной тревоги для «медленного» порога при тех же значениях  $a_0 = 1; 0,1; 0,01$  в случае  $\beta_0 = 1$ . Применение комбинированного медленного и быстрого порогов дает в данном случае примерно на порядок меньшее время установления, чем один медленный порог.

Адаптация сводится к настройке порогового множителя для быстрого порога, который критичен к виду распределения помехи. Непараметрические свойства медленного порога позволяют снизить влияние вида распределения помехи на вероятность ложной тревоги.

Обнаружитель может иметь также и быстрый комбинированный порог, в котором используются алгоритмы *A-Detector* и *M-Detector*, что дает алгоритм *AM-Detector*  $y \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M x_k + c_2 \cdot \max(x_1, \dots, x_M)$ . Выбором пороговых констант  $c_1$  и  $c_2$  можно придать определенный вес одному или другому виду адаптивного порога.

### 3.5. Адаптивный порог для логнормального распределения помехи

Логарифмическое нормальное (логнормальное) распределение  $f(x) = (\sigma_l x \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(1/2\sigma_l^2)[\ln(x/x_{\text{med}})]^2)$  широко применяется для описания помех на выходе амплитудного детектора, вызванных отражениями от земной и морской поверхностей и гидрометеоров. Здесь  $\sigma_l^2$  – дисперсия величины  $\ln x$ ,  $\sigma_l^2$  – параметр формы, медиана  $x_{\text{med}}$  – параметр масштаба распределения.

Отношение математического ожидания к медиане равно  $\rho = m/x_{\text{med}} = \exp(\sigma_l^2/2)$ , оно также характеризует форму распределения, отсюда  $\sigma_l^2 = 2 \ln \rho$ . Часто для характеристики формы удобно использовать коэффициент вариации  $k_v = \sigma/m = (\rho^2 - 1)^{1/2}$ . Заметим, что дисперсия случайной величины  $x$  с логнормальным распределением имеет другое значение, она равна  $\sigma^2 = m^2(\rho^2 - 1) = x_{\text{med}}^2 \rho^2(\rho^2 - 1)$ .

Параметры  $\sigma_l^2$  и  $x_{\text{med}}$  могут меняться в широких пределах в зависимости от состояния морской поверхности, угла падения и поляризации электромагнитных волн, вида когерентного накопления и др., поэтому их следует считать неизвестными. Это исключает использование фиксированного порога, если ставится требование стабилизации вероятности ложной тревоги.

Рассмотрим обнаружитель с быстрым порогом при логарифмическом преобразовании выборок (применяются натуральные логарифмы). Если параметры помехи известны, то оптимальный алгоритм принимает решение в пользу сигнала, если  $\ln(y) \geq \ln x_{\text{med}} + c_F \cdot \sigma_l$ , где  $c_F$  – процентная точка стандартного нормального распределения [1]. При неизвестном параметре масштаба оптимальным является алгоритм  $u \geq \bar{v} + c_F \cdot \sigma_l \cdot \sqrt{(M+1)/M}$ , где  $u = \ln(y)$ , а  $\bar{v} = (\sum_{k=1}^M \ln x_k)/M$  – оценка неизвестной величины  $\ln x_{\text{med}}$ . Величина  $u - \bar{v}$  имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $1+1/M$ . Возрастание дисперсии, вызванное оцениванием параметра масштаба, учитывается множителем  $\sqrt{(M+1)/M}$ . Этот обнаружитель  $\log(y) \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M \log(x_k) + c_0$  соответствует общей структуре *Log-A-Detector*.

Если неизвестны оба параметра, то можно использовать *Log-t-Detector*  $u \geq \bar{v} + c_t \cdot s_v$ , где  $\bar{v} = (\sum_{k=1}^M \ln x_k)/M$ ,  $s_v^2 = \sum_{k=1}^M (\ln(x_k) - \bar{v})^2 / M$ . Здесь пороговая константа  $c_t$  определяет вероятность ложной тревоги. Поскольку распределение  $u = \ln(y)$  при отсутствии сигнала оказывается гауссовским, то алгоритм обнаружения  $u \geq \bar{v} + t_F \cdot s_v \cdot \sqrt{(M+1)/(M-1)}$  представляет *t-Detector*, который был исследован в [3]. Здесь  $t_F$  – процентная точка



распределения Стьюдента с  $M - 1$  степенями свободы. В данной задаче алгоритм обеспечивает стабилизацию вероятности ложной тревоги для логнормального распределения помехи, т. е. оказывается *подобным* алгоритмом, обладающим непараметрическим свойством.

При появлении полезного сигнала распределение на выходе детектора уже не обязательно будет логнормальным, поэтому оптимальность алгоритма *Log-t-Detector* в общем случае не очевидна. Однако для многих распределений алгоритм оказывается *несмещенным* и вполне работоспособным.

Исследуем его качество для *экспоненциального* распределения полезного сигнала на выходе детектора. Для облегчения анализа рассмотрим случай сильного сигнала, когда отношение сигнал/помеха по мощности  $q^2 = M \{\xi_c^2\} / M \{\xi_i^2\}$  гораздо больше единицы. Тогда распределение смеси сигнала и помехи можно заменить распределением одного сигнала, т. е. экспоненциальным  $f_1(y) = (1/\beta_1) \exp(-y/\beta_1)$ , где  $\beta_1$  – параметр масштаба распределения.

С учетом логарифмического преобразования  $u = \ln(y)$  получаем распределение сигнала в виде  $f_1(u) = (e^u / \beta_1) \exp(-e^u / \beta_1)$ . Это частный случай распределения экстремальных статистик первого типа. Математическое ожидание распределения  $f_1(u)$  равно  $M_1(u) = \psi(1) + \ln \beta_1$ . Здесь  $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$  обозначает логарифмическую производную гамма-функции [2,13,19], и ее значение  $\psi(1) = -0,5772$ . Все кумулянты распределения, кроме первого, не зависят от  $\beta_1$ , и равны  $\kappa_n = \psi^{(n-1)}(1)$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Введем отношение сигнал/шум по мощности  $q^2$  на входе пороговой схемы  $q^2 = 2\beta_1^2 / (x_{\text{med}}^2 \rho^4)$ . Тогда математическое ожидание статистики  $u = \ln(y)$  при наличии полезного сигнала равно

$$M_1(u) = (1/2) \ln(q^2 / 2) + \ln x_{\text{med}} + 2 \ln \rho - 0,5772.$$

Алгоритм обнаружения можно записать в эквивалентном виде  $z \geq 0$ , где  $z = u - \bar{v} - t_F \cdot s_v \cdot \sqrt{(M+1)/(M-1)}$  – решающая статистика, формируемая на выходе адаптивного фильтра. Установить вид ее распределения  $w_1(z)$  при наличии сигнала затруднительно. В случае симметричной формы распределения  $w_1(z)$  его математическое ожидание совпадает с медианой, и оказывается возможным найти пороговое отношение сигнал/шум по мощности  $q_{0,5}^2$ , соответствующее вероятности правильного обнаружения  $D = 0,5$ .

На самом деле форма распределения  $w_1(z)$  не симметрична. Коэффициент асимметрии  $\gamma_3 = \kappa_3 / \sigma^3$  принимает отрицательные значения, которые зависят от  $\sigma_l$ ,  $M$  и значения процентной точки  $t_F$ . При малых  $M$

(до 50)  $\gamma_3$  принимает значения, близкие к минус 1, и они незначительно увеличиваются при увеличении  $t_F$ . Из отрицательной асимметрии следует, что плотность  $w_1(z)$  имеет более «тяжелый» хвост слева, поэтому математическое ожидание величины  $u = \ln(y)$  располагается левее, чем ее медиана. Таким образом, вероятность превышения математического ожидания будет больше, чем 0,5. В данном случае пороговые значения  $q'_{0,5}{}^2$ , получаемые таким способом, можно рассматривать как верхние границы для  $q_{0,5}^2$ . На самом деле истинные значения  $q_{0,5}^2$  будут меньше.

Значения  $q'_{0,5}{}^2$  приведены в таблице для ряда параметров задачи. Три числа в каждой ячейке рассчитаны для  $\sigma_l = 0,2; 0,5; 1$ , что соответствует  $\rho = 1,02; 1,133; 1,649$  и  $kv = 0,2; 0,533; 1,311$  соответственно. Последний столбец содержит пороговые отношения сигнал/шум, рассчитанные для полностью известных параметров помехи.

Представляет интерес сравнить характеристики адаптивного алгоритма с потенциальными характеристиками алгоритма с фиксированным порогом. При известных параметрах  $\sigma_l^2$  и  $x_{\text{med}}$  логнормального распределения помехи алгоритм обнаружения  $y \geq y_{NP}$  использует постоянный порог для критерия Неймана–Пирсона, который равен  $y_{NP} = y_{\text{med}} \exp(c_F \sigma_l)$ .

#### **Пороговые значения отношений сигнал/шум по мощности**

Вероятность л. т. $F$	Число обучающих выборок, $M$			$q'_{0,5}{}^2$ для фиксированного порога	
	10	20	50	задача (LN-E)	задача (E-E)
$10^{-2}$	18,5	16,36	15,37	8,7	43,14
	68,33	50,2	42,9	24,8	
	271	146,2	106,8	58,4	
$10^{-3}$	33,86	24,9	21,7	12,1	98,32
	309,2	143,7	101,8	54,4	
	5545	1198	601,2	271	
$10^{-4}$	68,03	37,5	29,47	16	175,57
	1770	399,2	218,5	103	
	181600	9240	2769	959	
$10^{-5}$	159,6	57,1	39	20	274,9
	14920	1143	441,5	179	
	$1,3 \cdot 10^7$	75720	11300	2883	

Характеристики обнаружения сигнала с экспоненциальным распределением на фоне логнормального шума обнаружителем с фиксированным порогом (задача (LN-E)) определяются выражением [1]:  $D = \exp(-\exp(c_F \sigma_l) / \rho^2 \sqrt{(1+q^2)/2})$ . Они построены на рис. 3.10 для вероятности ложной тревоги  $F = 0,01$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют

значениям  $\sigma_l = 0,2; 0,5; 1$ . Пунктиром на графике представлена характеристика обнаружения для задачи  $(E-E)$ . Качество обнаружения сигнала на фоне логнормального шума при малых  $\sigma_l$  лучше, чем на фоне экспоненциального, но с увеличением  $\sigma_l$  падает, и для больших значений  $\sigma_l$  становится хуже, чем в задаче  $(E-E)$ .

Ясно, что алгоритмы с адаптивным порогом могут лишь приближаться по качеству обнаружения к алгоритмам с фиксированным порогом, поэтому их пороговые значения отношения сигнал/шум при тех же характеристиках будут большими.

Пороговое отношение сигнал/шум (по мощности) в случае фиксированного порога равно  $q_{D,F}^2 = \kappa_{E/LN} \mu^2 - 1$ , где  $\kappa_{E/LN} = (\lg e)^2 2 \exp(2c_F \sigma_l) / \rho^4 a^2$  – коэффициент, характеризующий отличия формулы порогового отношения сигнал/шум для задачи  $(LN-E)$  от формулы  $q_{D,F}^2 = \mu^2 - 1$  для задачи  $(E-E)$  [1].

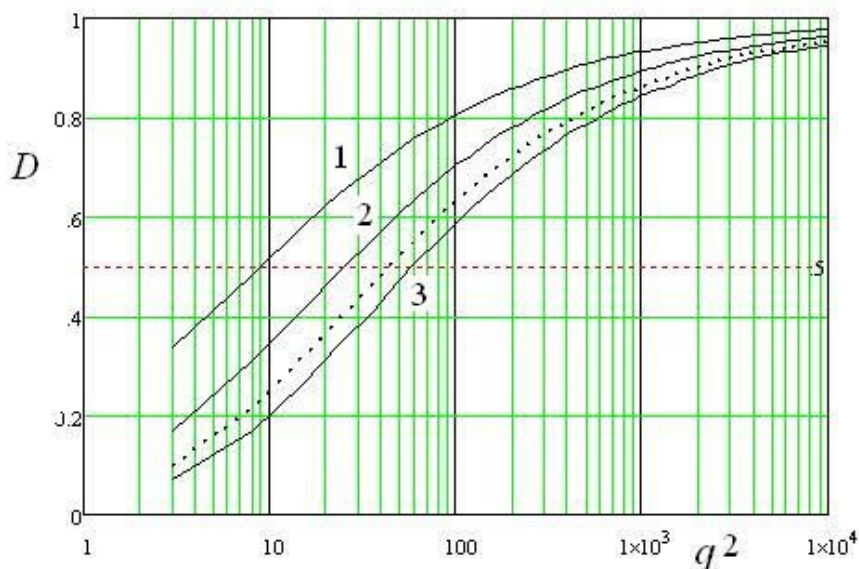


Рис. 3.10. Характеристики обнаружения алгоритмов с фиксированным порогом для задач  $(LN-E)$  и  $(E-E)$  при  $F=0,01$

Здесь  $\mu = a/b$ , где  $a = -\lg F$ ,  $b = -\lg D$  – индексы вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения. Если  $\rho > 1,2$ , то коэффициент  $\kappa_{E/LN}$  оказывается больше единицы, а пороговые значения  $q_{D,F}^2$  возрастают по сравнению с задачей  $(E-E)$ . Заметим, что для  $D = 0,5$  величина  $\mu = 3,322a$ .

Из табличных данных можно заключить, в каких случаях и насколько возрастает пороговое отношение сигнал/шум для алгоритма с адаптивным порогом по сравнению с фиксированным порогом.

Следует заметить, что алгоритмы с фиксированным порогом неработоспособны даже при незначительных изменениях параметров распределения шума, поэтому адаптация является вынужденной мерой, и

потери как раз характеризуют плату за непараметрическое свойство алгоритмов. К тому же алгоритм *Log-t-Detector* обладает хорошей робастностью и работоспособен при различных распределениях шума, отличных от логнормального, в частности, при нормальном и экспоненциальном шумах.

## 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ПОЛЕЙ И АЛГОРИТМОВ В СРЕДЕ Matlab

### 4.1. Формирование объектов на изображениях

Рассмотрим несколько программ, позволяющих получить сигнальные изображения для полезных объектов, которые могут использоваться для моделирования сигналов радиотехнических систем наблюдения.

Первая программа `func1_rect` формирует объект прямоугольной формы с заданными размерами и расположением в пределах изображения. Аргументы функции включают размеры изображения ( $m, n$ ), размеры сигнального прямоугольника ( $M, N$ ), и значения ( $x, y$ ), задающие смещение центра прямоугольника относительно центра изображения:

```
function[S]=func1_rect(m,n,M,N,x,y)
%rectangular signal window S=(M,N) in
%rectangular image window (m,n)
%m,n-vertical and horizontal image sizes
%M,N-vertical and horizontal window sizes
%x,y - signal window shift wrt the center
%of the image
N1=floor(N/2)-1; M1=floor(M/2)-1;
m1=ceil(m/2)+1; n1=ceil(n/2)+1;
for i=1:m
    for j=1:n
        S(i,j)=0;
    end
end;
for i=m1-M1-1+y:m1+M1+y+1
    for j=n1-N1-1+x:n1+N1+x+1
        S(i,j)=1;
    end
end
```

Применение этой функции иллюстрируется следующей программой, а полученное изображение приведено на рис. 4.1 (слева):

```
clear %removes all variables from the workspace
close all % deletes all figures
STEP=0
m=256 %vertical image size
n=256 %horizontal image size
M=25 %vertical window size
N=49 %horizontal window size
x=0 %horizontal window shift
y=0 %vertical window shift
S=func1_rect(m,n,M,N,x,y);
indS=find(S); %array of nonzero elements
NS1=size(indS) %number of cells
figure(10), imshow(S,[]), title('Signal');
```

Вторая функция, которая будет использоваться далее, формирует изображение  $S_0$ , разделенное на две части горизонтальной границей, так что верхняя часть будет черной, а нижняя – белой. Входной параметр  $y$  задает смещение границы, при  $y=0$  граница делит изображение пополам. Выходной параметр  $M$  дает абсолютный сдвиг границы относительно верха изображения. Функция `func1_one_edge` формирует еще три изображения  $S_{90}$ ,  $S_{180}$  и  $S_{270}$ , получаемые последовательным поворотом изображения  $S_0$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки:

```
function[S0,S90,S180,S270,M]=func1_one_edge(m,n,y)
%one edge in rectangular window (m,n)
%m-vertical, n-horizontal
%y - shift wrt the center of the window
m1=ceil(m/2)+1;
for i=1:m
    for j=1:n
        S(i,j)=0;
    end
end;
if y>m1-1, y=m1-2; end
M=m1+y;
for i=M:m
    for j=1:n
        S(i,j)=1;
    end
end;
S0=S; S90=rot90(S); S180=rot90(S90); S270=rot90(S180);
```

Применение данной функции в программе `test_one_edge` позволяет получить изображения, приведенные на рис. 4.1:

```
%test_one_edge
close all
STEP=0
m=256; n=256; y=0 %vertical shift
[S0, S90, S180, S270, M]=func1_one_edge(m,n,y);
%counterclockwise rotation
indS0=find(S0); NS0=size(indS0)
M
figure(10), imshow(S0,[]), title('HorizontalEdge');
figure(11), imshow(S90,[]), title('VerticalEdge');
figure(12), imshow(S180,[]), title('HorizontalUpsideEdge');
figure(13), imshow(S270,[]), title('VerticalUpsideEdge');
imwrite(S0, 'S0.jpg');
imwrite(S90, 'S90.jpg');
imwrite(S180, 'S180.jpg');
imwrite(S270, 'S270.jpg');
```

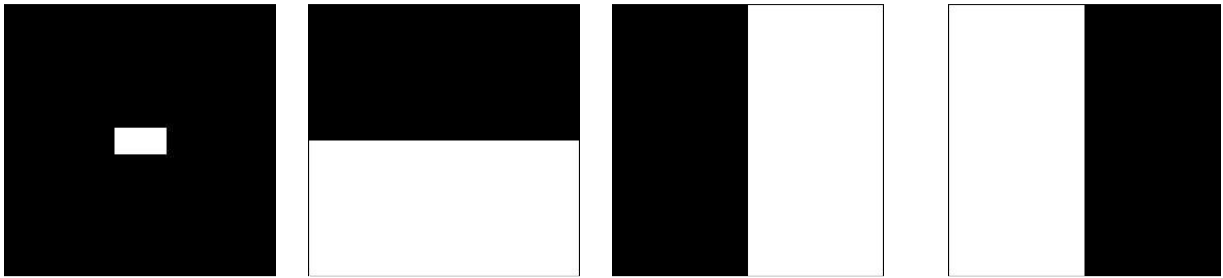


Рис. 4.1. Тестовые изображения прямоугольного объекта (слева), и различные положения границы на изображении  $S0$ ,  $S90$  и  $S180$

## 4.2. Моделирование шумов с различными распределениями вероятности

Рассмотрим программы моделирования шумовых помех, т. е. помех с независимыми значениями. Для исследования помехоустойчивости различных алгоритмов обработки применяются шумы с модельными распределениями вероятностей [1, 2]. Часто используются однопараметрические модели для плотностей вероятностей (например, экспоненциальная и релеевская плотности вероятностей), и двухпараметрические семейства плотностей (гауссовское, Вейбулла, гамма, логнормальное, равномерное и др.). Малое число входных параметров обеспечивает легкость управления моделью, хотя модели с малым числом параметров не всегда точно описывают реальные процессы в радиотехнических системах.

Экспоненциальное распределение  $E(\beta)$  с параметром масштаба  $\beta$  играет важную роль при описании случайных процессов. Оно сильно отличается от гауссовского и входит в такие известные семейства распределений, как распределение Вейбулла и гамма-распределение. Таким образом, оно является некоторой связкой между этими двумя семействами.

Моделирование шума с экспоненциальным распределением дается функцией `func2_sum_exp`:

```
function [e, E]=func2_sum_exp(m, n, b, N)
%sum of N exp noises, scale b
e=zeros([m, n], 'double');
for k=1:N
r1=rand(m, n); e1=-log(1-r1)*b; e=e1+e;
end;
me=max(max(e)); E=e/me;
```

Входной параметр  $b$  представляет масштаб распределения  $\beta$ . При  $n=1$  функция генерирует матрицу независимых случайных чисел с экспоненциальной плотностью вероятностей. Выходная матрица  $E$  представляет случайные числа, нормированные к максимальному значению.

При  $N > 1$  функция дает в каждой точке изображения сумму  $N$  независимых экспоненциально распределенных чисел.

Применение этой функции иллюстрируется программой:

```
%main_sum_exp_noise
clear all
close all
STEP=0
m=256; n=256; [m,n]
N=1 %number of noises
STEP=1 %ExpNoise
b=30 %scale parameter
[e,E]=func2_sum_exp(m,n,b,N);
figure(11), imshow(E,[]), title('SumExpNoise');
figure(110), imhist(E), title('SumExpHistogram');
t=input('STOP_1_ExpNoise','s');
STEP=2 %ExponentialPDF
me=max(max(e)) %max value
XM=floor(me); DXM=XM/200;%plot distribution
x=1:DXM:XM; p1 = pdf('exp',x,b);
figure(1000), plot(x,p1), title('Theoretical PDF');
t=input('STOP_2_ExpPDF','s');
STEP=3 %ParametersCalc1
[mean,var,sigma,gamma1,mn]=func3_mean_var_calc(e);
[mean,var,sigma,gamma1] % parameters output
t=input('STOP_3_ExpNoiseParameters_1','s');
STEP=4 %ParametersCalc1
[skew,gamma3,kurt,gamma4,mn]=func3_skew_kurt_calc(e);
[skew,gamma3,kurt,gamma4] % parameters output
t=input('STOP_4_ExpNoiseParameters_2','s');
```

Для исследования характеристик полученного шумового изображения вводятся еще две функции. Функция `func3_mean_var_calc` вычисляет выборочные среднее `mean` и дисперсию `var` по всему изображению:

```
function[mean,var,sigma,gamma1,mn]=func3_mean_var_calc(Y)
[m,n]=size(Y); mn=m*n;
mean=sum(sum(Y)); mean=mean/mn; Z=Y-mean;
var=sum(sum(Z.^2)); var=var/(mn-1); sigma=sqrt(var);
gamma1=mean/sigma;
```

Кроме того, функция вычисляет выборочное среднеквадратическое значение (стандартное отклонение) `sigma` и выборочный коэффициент `gamma1`, который является обратной величиной к коэффициенту вариации (отношение математического ожидания к СКО). Заметим, что вычисляемые выборочные значения являются лишь оценками для параметров плотности, а не самими параметрами. Они случайны, и сами имеют плотности вероятностей, которые часто трудно точно установить. В частности, выходной параметр `mean` есть среднее арифметическое, он является случайной оценкой для неслучайной величины математического ожидания. В



случае экспоненциальной плотности математическое ожидание совпадает с параметром масштаба **b**, и значение **mean** является достаточно хорошей несмещенной оценкой для него.

Для моментов и кумулянтов высших порядков моментные оценки не всегда обладают хорошими свойствами, и это следует учитывать при их практическом использовании. Выходной параметр **mn** дает общее число выборок на изображении.

Функция **func3\_skew\_kurt\_calc** вычисляет выборочные значения для асимметрии **skew** и эксцесса **kurt**, а также выборочные значения кумулянтных коэффициентов третьего и четвертого порядков **gamma3** и **gamma4**:

```
function[skew, gamma3, kurt, gamma4, mn]=func3_skew_kurt_calc(Y)
[m, n]=size(Y); mn=m*n;
mean=sum(sum(Y)); mean=mean/mn; Z=Y-mean;
var=sum(sum(Z.^2)); var=var/(mn-1);
skew=sum(sum(Z.^3)); skew=skew/mn;
kurt=sum(sum(Z.^4)); kurt=kurt/mn; sigma=sqrt(var);
gamma3=skew/sigma.^3; gamma4=kurt/var.^2-3;
```

На рис. 4.2 показаны гистограммы, полученные для экспоненциальной плотности (слева), для суммы пяти независимых случайных чисел (в центре), и для десяти случайных чисел (справа). Очевидно, что плотности имеют тенденцию к увеличению симметрии слева направо, что отражает эффект «нормализации» плотностей при суммировании случайных чисел в соответствии с центральной предельной теоремой.

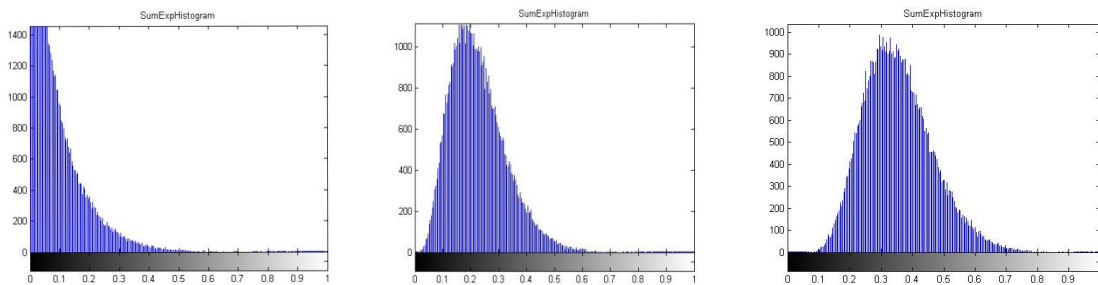


Рис. 4.2. Гистограммы для экспоненциального распределения (слева), и для сумм пяти и десяти экспоненциально распределенных чисел

Для генерирования шумов с другими модельными распределениями и исследования их характеристик в программе **main\_sum\_exp\_noise** достаточно заменить два фрагмента с заголовками **STEP=1** и **STEP=2**.

В случае релеевского шума  $R(\beta)$  с параметром масштаба  $\beta$  эти фрагменты будут такими:

```
STEP=1 %RayleighNoise
b=30;
[r, R]=func2_sum_Rayleigh(m, n, b, N);
```

```

figure(11), imshow(r, []), title('SumRayleighNoise');
figure(110), imhist(R), title('SumRayleighHistogram');
t=input('STOP_1_RayleighNoise','s');
STEP=2 %RayleighPDF
mr=max(max(r)) %max value
XM=floor(mr); DXM=XM/200;%plot distribution
x=1:DXM:XM; p1 = pdf('rayl',x,b);
figure(1000), plot(x,p1), title('Theoretical PDF');
t=input('STOP_2_RayleighPDF','s');

```

Функция `func2_sum_Rayleigh` содержит параметр масштаба  $b$ , равный  $\beta$  для релеевского распределения  $R(\beta)$ :

```

function[r,R]=func2_sum_Rayleigh(m,n,b,N)
%sum of N Rayleigh noises, scale b
r=zeros([m,n],'double');
for k=1:N
ul=rand(m,n); e1=-log(1-ul); r1=b*sqrt(e1); r=r1+r;
end;
mr=max(max(r)); R=r/mr;

```

Для гауссовского шума  $N(\mu, \sigma)$  с математическим ожиданием (МО)  $\mu$  и среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma$  фрагмент программы выглядит так:

```

STEP=1 %NormalNoise
a=30; b=10;
[g,G]=func2_sum_normal(m,n,a,b,N);
figure(11), imshow(G, []), title('SumNormalNoise');
figure(110), imhist(G), title('SumNormalHistogram');
t=input('STOP_1_NormalNoise','s');
STEP=2 %NormalNoiseCalc1
mg=max(max(g)) %max value
XM=floor(mg); DXM=XM/200;%plot distribution
x=1:DXM:XM; p1 = pdf('norm',x,a,b);
figure(1000), plot(x,p1), title('Theoretical PDF');

```

Функция `func2_sum_normal` имеет в качестве входных параметров МО и СКО значения  $(a, b)$ , а  $N$  есть число суммируемых случайных величин при генерировании случайного значения в каждой точке поля:

```

function[g,G]=func2_sum_normal(m,n,a,b,N)
%sum of N Gauss noises, scale b
g=zeros([m,n],'double');
for k=1:N
g1=randn(m,n); g1=g1*b+a; g=g1+g;
end;
mg=max(max(g)); G=g/mg;

```

Логнормальное распределение  $LN(x_{med}, kv)$  генерируется с помощью следующих фрагментов:

```

STEP=1 %LognormalNoise
med=30; kv=0.5; %med>0 kv>0
[lg,LG,ro,mul,sigmal,E,V]=func2_sum_Lognormal(m,n,med,kv,N);
figure(11), imshow(LG,[]), title('SumLognormalNoise');
figure(110), imhist(LG), title('SumLognormalHistogram');
ro %ro=E/med
%ro_check=E/med
mul %N(mul,sigmal)-generic normal distribution
sigmal % sigmal=sqrt(2ln(ro))
t=input('STOP_1_LognormalNoise','s');
STEP=2 %LognormalPDF
mlg=max(max(lg)) %max value
XM=floor(mlg); DXM=XM/200;%plot distribution
x=1:DXM:XM; p1 = pdf('logn',x,mul,sigmal.^2);
figure(1000), plot(x,p1), title('Theoretical PDF');
t=input('STOP_2_LognormalPDF','s');

```

Функция `func2_sum_Lognormal` имеет в качестве входных параметров медиану `med` и коэффициент вариации `kv` плотности вероятности:

```

function[lg,LG,ro,mul,sigmal,E,V]
=func2_sum_Lognormal(m,n,med,kv,N)
%sum of N Lognormal noises, med-median, kv- coeff. var
lg=zeros([m,n],'double');
ro=sqrt(kv.^2+1); mul=log(med); E=ro*med;
V=E.^2*kv.^2; sigmal=sqrt(2*log(ro));
for k=1:N
    g1=randn(m,n); g1=g1*sigmal+mul;
    lg1=exp(g1); lg=lg1+lg;
end;
mlg=max(max(lg));
LG=lg/mlg;

```

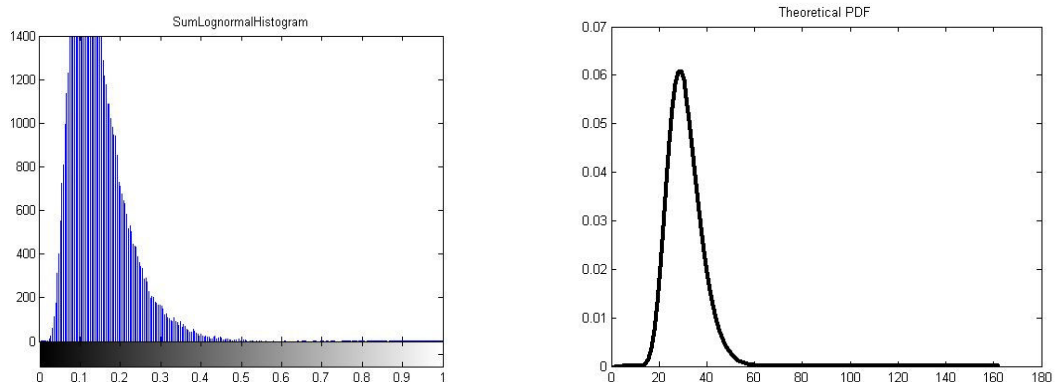


Рис. 4.3. Гистограмма логнормального распределения (слева) и теоретическая плотность вероятности (справа)

На рис. 4.3 представлены гистограмма логнормального распределения, полученная для  $med=30$ ,  $kv=0,5$  (слева), и теоретическая плотность вероятности (справа).

### 4.3. Моделирование объектов на фоне шумов и алгоритмов обнаружения с постоянным порогом

Общая структура программы моделирования наблюдений и алгоритмов обнаружения с постоянным порогом изображена на рис. 4.4. Программы позволяют сформировать тестовые изображения для исследования характеристик случайных полей, а также для анализа характеристик алгоритмов обработки, в частности, для обнаружения и распознавания объектов на изображениях. Блоки 2 и 3 включают специальные функции, вид которых зависит от используемой модели объекта и шума. Примеры формирования изображений объекта на фоне различных шумов и соответствующие гистограммы приведены на рис. 4.5.



Рис. 4.4. Общая структура программы моделирования объектов на фоне шумов и алгоритмов обнаружения с постоянным порогом

Сигнальная область представляет квадрат  $49 \times 49$ . На рис. 4.5 слева использована экспоненциальная модель шума  $E(30)$ , в центре – гауссовский шум  $N(30,30)$ , справа – логнормальный шум  $LN(21,1)$ .

В сигнальной области параметр шума отличается так, что обеспечивается заданное значение отношения сигнал/шум в каждом пикселе. В данном случае решающая статистика совпадает с выборкой, поэтому ее дефлексия равна отношению сигнал/шум на входе. Дефлексия решающей статистики по определению есть изменение ее математического ожидания вследствие появления сигнала, отнесенное к среднеквадратическому значению шума.

Алгоритм обнаружения с постоянным порогом является простейшим алгоритмом, преобразующим исходное яркостное изображение в бинарное. В простейшем случае решение о наличии полезного сигнала принимается в каждой точке (пикселе) исходного изображения. Такие процедуры с глобальным порогом (одинаковым для всех пикселей изображения) существуют среди стандартных функций Matlab, например, функция `im2bw` позволяет конвертировать `grayscale` изображение в бинарное с использованием порога `level` со значениями в диапазоне  $[0,1]$ .

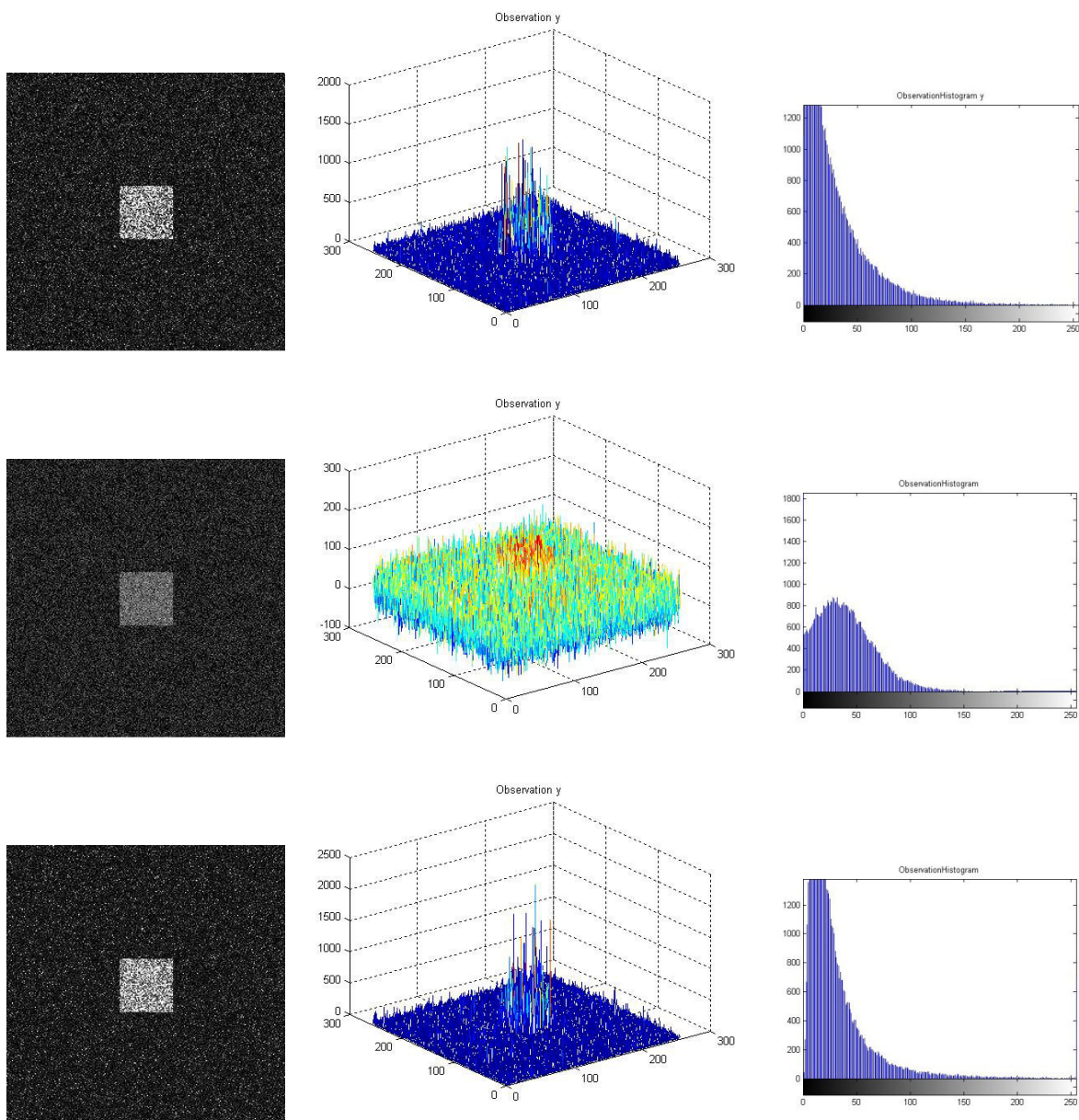


Рис. 4.5. Изображения объекта на фоне различных шумов и соответствующие гистограммы

Поскольку величина порога нормирована к максимальному значению на изображении, а оно может принимать случайное значение, то возникают трудности при попытке установить требуемое абсолютное значение порога.

В автоматическом режиме порог можно определить с использованием функции **graythresh**. В этом случае применяется метод Отсу, который основан на анализе гистограммы изображения. Предполагается, что любой из пикселей изображения может принадлежать одному из двух классов (*background* – фон или *foreground* – передний план). Значение порога, разделяющего пиксели на два класса по величине интенсивности, минимизирует взвешенную сумму выборочных дисперсий для двух классов (внутриклассовую дисперсию). Метод обладает универсальностью, однако он

плохо применим к радиотехническим задачам, в которых требуется использовать критерии оптимальности и учесть априорную информацию о статистических свойствах сигналов и шумов.

В связи с необходимостью контроля и управления процессом обнаружения для радиотехнических задач предлагаются другие алгоритмы, использующие статистические характеристики процессов, а также методы инвариантности и адаптации в условиях априорной неопределенности [2, 3].

Рассмотрим программу `main_exp_const_thr` для моделирования алгоритма обнаружения объекта на изображении при действии шума с экспоненциальным распределением:

```
clear all    %main_exp_const_thr
close all

STARTING_PROCESS=1    %1_INPUT_IMAGE
m=256; n=256; M=49; N=49; x=0; y=0; %Windows
s=func1_rect(m,n,M,N,x,y);
figure(1), imshow(s,[]), title('InputBinaryImage');
inds=find(s); Ns=size(inds);%NumberOfPoints
    [ms ns]=size(s); %m-vertical
maxs=max(max(s)); %max value of the signal=1
    t=input('STOP_1_InputBinaryImage_Fig1','s');
        STEP=2    %2_ExpThrCalculation
F0=0.01; D0=0.5; beta0=30;
[thr0,d0]=func2_exp_const_thr_calc(F0,D0,beta0);
    thr0
    d=d0 %d=d0 - theoretical value
        t=input('STOP_2_InsertTheorValueDeflection','s');
            STEP=3    %3_EXP NOISE GENERATION
[z0 zd]=func3_exp_noise_gen(m,n,beta0,d);
%z0, zd - matrices (m,n), m-vertical
z01=uint8(z0); z02=z01*5;
zd1=uint8(zd); zd2=zd1;
% figure(3), imshow(z02,[]), title('ExpNoise z0');
% figure(31), imhist(z01);
% figure(32), imshow(zd2,[]), title('ExpSignal zd');
% figure(33), imhist(zd1);
        STEP=4    %4_OBSERVATION
for i=1:m
    for j=1:n
        y(i,j)=zd(i,j)*s(i,j)+z0(i,j)*(1-s(i,j));
    end;
end;    %whos y
% may=max(max(y))    %max value of observation
% miy=min(min(y))    %min value of observation
%figure(41), imshow(y,[]), title('Observation');
%figure(42), imhist(y);
y2=uint8(y); % whos y2    %get image format
% mmy2=max(max(y2))
figure(40), imshow(y2,[]); title('Observation y');
figure(43), imhist(y2), title('ObservationHistogram y');
figure(401), mesh(y), title('Observation y');
```

```

t=input('STOP_4_GettingObservation_Fig40','s');
STEP=5 %5_FalseAlarmConstThreshold
thr=thr0 %theoretical value
t=input('STEP_5_InsertTheorValueConstThr','s');
[F I H A]=func4_bin(z0,thr,0); %whos I
F %FalseAlarms
A %number of detections
H %cell number of window
figure(5), imshow(I,[]), title('FalseAlarmConstThresh');
t=input('STOP_5_FalseAlarmConstThresh','s');
STEP=6 %RightDetectionConstThr
[Ds Ps Bs As]=func5_det_sign(y,thr,s);%whos P
Ds % Detections
figure(6), imshow(Ps,[]),
title('SignalDetConstThrSignalField');
FINAL_STEP=7 %DetectionConstThr
[D P B C ]=func4_bin(y,thr,0); %whos P1;
[D,B,C]
figure(7), imshow(P,[]), title('DetConstThresh');
t=input('FINAL_STOP_7_NP_DetConstThr_Fig7','s');
imwrite(s,'s.jpg'); imwrite(y2,'y.jpg');
imwrite(I,'I.jpg'); imwrite(P,'P.jpg');

```

На первом шаге формируется бинарное изображение объекта с использованием функции `func1_rect`. На втором шаге программы по заданным вероятностям ложной тревоги  $F_0$  и правильного обнаружения  $D_0$  производится вычисление теоретического значения порога обнаружения  $thr_0$  с использованием критерия Неймана–Пирсона. Также вычисляется пороговое значение дефлексии  $d_0$  решающей статистики  $y$ . Эти величины вычисляются функцией `func2_exp_const_thr_calc` по формулам, приведенным в [1]:

```

function [ thr,d ] = func2_exp_const_thr_calc(F,D,beta0)
%const threshold and thr deflection calculation
a=-log10(F); e1=exp(1); c=log10(e1);
thr=a*beta0/c; b=-log10(D); d=a/b-1;

```

На третьем шаге программы генерируются два массива случайных чисел, один из которых  $z_0$  соответствует экспоненциальному шуму с параметром  $b_0$ , а другой массив  $z_d$  – шуму с параметром  $b_1=b_0(d+1)$ , где значение отношения сигнал/шум  $d$  может быть задано произвольно. Если оно задается равным пороговой дефлексии  $d_0$ , то алгоритмом будут обеспечены заданные характеристики обнаружения. Для генерирования шумов используется функция `func3_exp_noise_gen`:

```

function [ z0,zd ] = func3_exp_noise_gen(n,m,beta0,d)
%exp noise matrix (m,n) generation for two beta
%m-vertical
r0=rand([n m]); r1=rand([n m]); beta1=beta0*(d+1);
z0=-beta0*log(1-r0); zd=-beta1*log(1-r1);

```





На четвертом шаге формируется массив наблюдений  $y$ , в котором фоновая область соответствует массиву  $z_0$ , а область объекта – сигнальная область – массиву  $z_d$ .

На пятом шаге производится бинаризация фонового изображения  $z_0$ , для этого в функции `func4_bin` задается порог  $thr$ . При использовании критерия Неймана-Пирсона значение  $thr$  берется равным теоретическому значению  $thr_0$ . Функция позволяет получить бинаризованное изображение  $I$ , и вычислить количество превышений порога  $A$ , размер изображения  $H$ , а также относительное число превышений порога  $F = A/H$ . Входной параметр  $Nshr$  используется при изменении (усечении) исходного размера изображения для удаления краевых эффектов, и в данном случае полагается равным нулю.

Выходная величина  $F$  является оценкой вероятности ложной тревоги по всему изображению:

```
function [ F,I,H,A ] = func4_bin(Y,T,Nshr)
%const threshold comparator for matrix Y
%output matrix I, exceedings number F
W=size(Y); H=W(1)*W(2);
for i=1:1:W(1),
    for j=1:1:W(2)
        I(i,j)=0;
        if (Y(i,j)>T), I(i,j)=1; end;
    end;
end;
A=sum(sum(I));
if Nshr>0 F=A/Nshr; else F=A/H; end;
```

Для определения числа правильных превышений порога в сигнальной области на шестом шаге используется функция `func5_det_sign`

```
function [ Ds,Ps,Bs,As ] = func5_det_sign(Y,T,S)
%right detection counting
%I=1 for detection Y>T, Q=1 is signal indication
%P=1 for right detection in signal field
W=size(S);
for i=1:1:W(1),
    for j=1:1:W(2)
        I(i,j)=0;
        if (Y(i,j)>T), I(i,j)=1; end;
        Ps(i,j)=0; Q(i,j)=0;
        if S(i,j)>0, Q(i,j)=1; end;
        if (S(i,j)>0)&&(I(i,j)>0), Ps(i,j)=1; end;
    end;
end;
Bs=sum(sum(Q)); As=sum(sum(P)); Ds=As/Bs;
```

Входная величина **S** определяет сигнальную область, по которой производится оценивание числа превышений порога. Выходная величина **Ds** является оценкой вероятности правильного обнаружения по сигнальной области.

На седьмом шаге работает функция **func4\_bin**, которая оценивает число превышений порога **D** по всему изображению.

В случае нормального шума в программе изменятся шаги 2 и 3:

```

                STEP=2      %2_NormThrCalculation
F0=0.01; D0=0.5;
mu0=30      %background level
sigma0=30   %background level
    t=input('STOP_InputData','s');
[thr0,d0]=func2_norm_const_thr_calc(F0,D0,mu0,sigma0);
thr0
d0%theoretical threshold deviation
    d=d0;% d=d0 - thoretical value
    t=input('STOP_2_InsertTheorValueDeflection','s');
                STEP=3      %3_Normal_NOISE_GENERATION
    d      %deflection value
    gamma=0 %relative var change
[z0 zd]=func3_norm_noise_gen(m,n,mu0,sigma0,d,gamma);
%z0, zd - matrices (m,n), m-vertical
z01=uint8(z0); z02=z01*5; zd1=uint8(zd); zd2=zd1;
figure(30), imshow(z02,[]), title('NormNoise z0');
figure(301), imhist(z01);
figure(31), imshow(zd2,[]), title('NormSignalPlusNoise zd');
figure(311), imhist(zd1);

```

На этих шагах используются функция **func2\_norm\_const\_thr\_calc** для вычисления теоретического порога и пороговой дефлексии и функция **func3\_norm\_noise\_gen** для формирования двух массивов случайных чисел:

```

function [ thr,d ] = func2_norm_const_thr_calc(F,D,mu,sigma)
%const threshold and thr deflection calculation for norm noise
    x=icdf('Normal',1-F,0,1); %percentile
    thr=mu+x*sigma;
    y=icdf('Normal',D,0,1);   d=(x+y);

```

Входной параметр **gamma** задает изменение дисперсии, в данном случае при неизменной дисперсии он равен нулю:

```

function [ z0,zd ] =
func3_norm_noise_gen(n,m,mu0,sigma0,d,gamma)
%norm noise matrix (m,n) generation for two mu values
%m-vertical
    g0=randn([n m]); g1=randn([n m]);
    z0=g0*sigma0+mu0;
    mu1=mu0+d*sigma0;
    sigmalsq=sigma0.^2*(gamma+1);
    sigmal=sqrt(sigmalsq);

```

```
zd=g1*sigma1+mu1;
```

В случае логнормального шума второй шаг программы:

```

                STEP=2      %2_LognormThrCalculation
F0=0.01;  D0=0.5;
med0=21
kv=1      %med>0    kv>0
mu0=0;  sigma0=1;
t=input('STOP_InsertInputParameters','s');
[thr1,d0,d1,E0,stdev0,E1,stdev1,med1] =
func2_Lognorm_const_thr_calc(F0,D0,med0,kv);
[thr1,d0,d1,E0,stdev0,E1,stdev1,med1]
t=input('STOP_2_InsertTheorValueDeflection','s');
                STEP=3      %LognormNoiseGeneration
[z0,zd,ro,mul0,mull1,sigmal,E0,stdev0,E1,stdev1]
=func3_Lognorm_noise_gen(m,n,med0,kv,d1);
ZD=uint8(zd);
figure(3), imshow(ZD,[]), title('LognSignPlusNoise');
figure(31), imhist(zd), title('LognSignPlusNoiseHistogram');
[ro,mul0,mull1,sigmal] %ro=E/med
%N(mul,sigmal)-generic normal distribution, sigmal=sqrt(2ln(ro))

```

Соответствующие функции `func2_Lognorm_const_thr_calc` и `func3_Lognorm_noise_gen` ИМЕЮ ВИД:

```

function [thr1,d,d1,E0,stdev0,E1,stdev1,med1] =
func2_Lognorm_const_thr_calc(F,D,med0,kv)
%const threshold and thr deflection calculation for Lognorm
noise, med0-noise median, kv- coeff. var
ro=sqrt(kv.^2+1); mul0=log(med0);
E0=ro*med0;          %NoiseExpectation
stdev0=E0*kv;       %NoiseStDeviation
sigmal=sqrt(2*log(ro));
x=icdf('Normal',1-F,0,1); %percentile
thr=mul0+x*sigmal; thr1=exp(thr);%LognormThreshold
y=icdf('Normal',D,0,1); d=(x+y);
mull1=mul0+d*sigmal; med1=exp(mull1);
E1=ro*med1; %SignPlusNoiseExpectation
stdev1=E1*kv; %SignPlusNoiseStdev
d1=(E1-E0)/stdev0; %deflection

```

```

function[z0 zd ro mul0 mull1 sigmal E0 stdev0 E1
stdev1]=func3_Lognorm_noise_gen(m,n,med0,kv,d1)
% med-median, kv- coeff. var
ro=sqrt(kv.^2+1); mul0=log(med0);
E0=ro*med0;          %NoiseExpectation
stdev0=E0*kv;       %NoiseStDeviation
sigmal=sqrt(2*log(ro)); E1=E0+d1*stdev0;
stdev1=E1*kv; med1=E1/ro; %SignPlusNoiseMedian
mull1=log(med1);
g0=randn(m,n); g0=g0*sigmal+mul0;
g1=randn(m,n); g1=g1*sigmal+mull1;
z0=exp(g0); zd=exp(g1);

```

Результаты обработки различных полей представлены на рис. 4.6. Тестовые изображения формировались с использованием моделей экспоненциального шума  $E(30)$ , нормального шума  $N(30,30)$  и логнормального шума  $LN(21,1)$  в фоновой области. В сигнальной области  $49 \times 49$  эти распределения имели другие параметры, определяемые отношением сигнал/шум.

В случае экспоненциального и нормального распределений математические ожидания в сигнальной области увеличивались в соответствии с пороговой дефлексией, т. е. отношением сигнал/шум, при котором обеспечивались заданные значения вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения:  $F = 0,01$ ,  $D = 0,5$ .

Для экспоненциального распределения пороговая дефлексия равнялась 5,644, для нормального – 2,326. В случае логнормального распределения задавалось отношение сигнал/шум для порождающего нормального распределения равным 2,326. В результате пороговая дефлексия для каждой выборки логнормального распределения была равна 5,937.

Во всех трех случаях выбирался оптимальный порог по критерию Неймана-Пирсона. Из этого следует, что для обнаружения сдвига распределения в сигнальной области с заданной вероятностью  $D$  наименьшая пороговая дефлексия требуется для нормального распределения, а другие модели требуют увеличения ее более чем в два раза.

Нижний ряд рисунков показывает результаты пороговой обработки тестовых изображений с использованием функций **graythresh** и **im2bw**. Вследствие различия гистограмм значения порогов по методу Отсу сильно зависят от вида распределения. Для экспоненциальной модели шума относительный порог был равен 0,282, в случае нормального шума 0,157, для логнормального шума – 0,341. Во всех трех случаях метод Отсу давал более низкие пороги, чем те, которые получались по критерию Неймана-Пирсона, что влекло увеличение число ложных тревог на изображении. Для нормального шума порог Отсу оказался слишком низким даже по сравнению с порогом по байесовскому критерию максимального правдоподобия, значение которого равно 0,5.

Программы позволяют сформировать тестовые изображения для исследования характеристик случайных полей, а также для анализа характеристик алгоритмов обработки, в частности, для обнаружения и распознавания объектов на изображениях. Они дают возможность исследовать влияние параметров основных модельных распределений на характеристики обнаружения для обнаружителя с постоянным порогом. Таким образом, можно определить значимость тех или иных параметров в случае априорной неопределенности [1, 2].

Рассмотренные алгоритмы используют для бинаризации изображения глобальный порог, который вычисляется для всего изображения. При этом никак не учитываются размеры и форма объекта в сигнальной области, поскольку для этого требуется априорная информация о структуре объекта

на изображении, и соответствующие алгоритмы предварительного сглаживания.

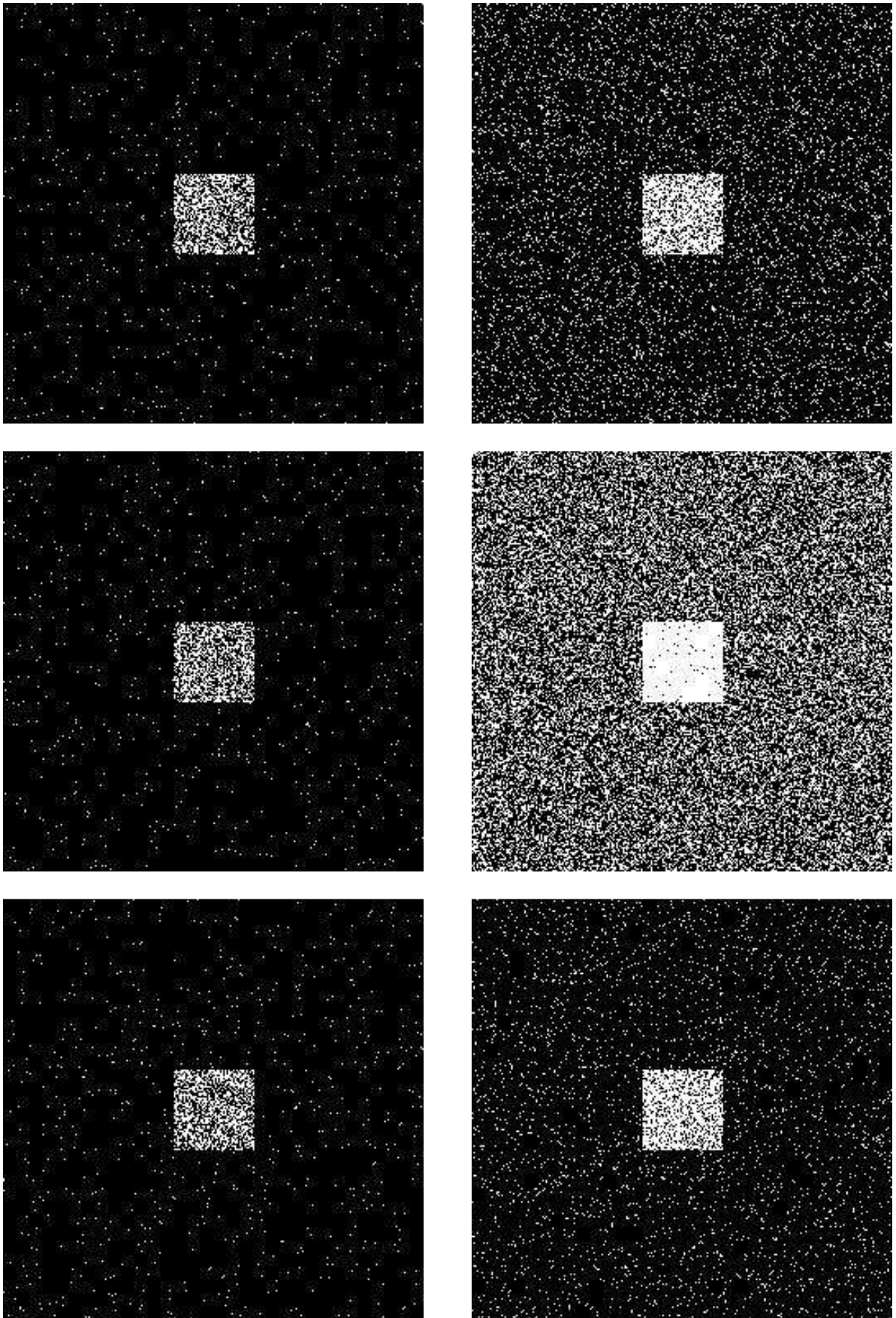


Рис. 4.6. Результаты обнаружения объекта на фоне различных шумов: слева – по критерию Неймана–Пирсона, справа – с порогом по методу Отсу



В связи со сложной и неоднородной структурой изображений обычно применяются локальные пороги, при этом используются методы инвариантности, робастности и адаптации [2, 3]. При неизвестной форме и размерах объектов переходят к универсальным методам выделения кромок (перепадов интенсивности), границ текстур, пятен и других так называемых «точек интереса» или «областей интереса».

#### 4.4. Моделирование алгоритмов обнаружения с адаптивным порогом в случае экспоненциального шума

Алгоритмы обнаружения с адаптивным порогом осуществляют подстройку порогового уровня в соответствии с изменяющейся сигнально-помеховой обстановкой. Идея быстрой регулировки порога реализуется с помощью локальных окон, размеры и формы которых выбираются так, чтобы обеспечить раздельное группирование сигнальных и помеховых (фоновых) выборок. Для создания алгоритмов может использоваться теория РНМ несмещенных, подобных и инвариантных решающих правил, а также оценки максимального правдоподобия для мешающих параметров [2]. Алгоритм обнаружения *A-Detector* имеет вид  $y \geq c_1 \cdot \sum_{k=1}^M x_k$ , где в правой части формируется адаптивный порог, а пороговая константа  $c_1$  связана с используемой в программе величиной так, что  $CA = c_1 \cdot M$ .

Рассмотрим обнаружение сигнала в каждом пикселе, в предположении, что объект точечный. Это означает, что вокруг единичного сигнального пиксела существует однородная область фона, в которой нет других сигналов.

Представим программный блок для моделирования совокупности из 121-точечных объектов:

```

STARTING_PROCESS=1 %1_INPUT IMAGE
m=256; n=256; M=1; N=1;
s=zeros(m,n);
for x=-25:5:25 %121 points
    for y=-25:5:25
        s=s+func1_rect(m,n,M,N,x,y);
    end
end
figure(1), imshow(s,[]), title('Input Binary Image');
inds=find(s); Ns=size(inds)%size of SignalField
t=input('STOP_1_InputBinaryImage_Fig1','s');

```

На рис. 4.7 представлены сигнальное изображение точечных объектов (слева), и наблюдения в экспоненциальном шуме (справа) при отношении сигнал/шум в каждом пикселе  $d = 5,644$ .

Для формирования адаптивного порога используется группирование помеховых выборок в целях получения значения локального порога. Для

этого используется помеховое окно, окаймляющее каждый анализируемый пиксел.

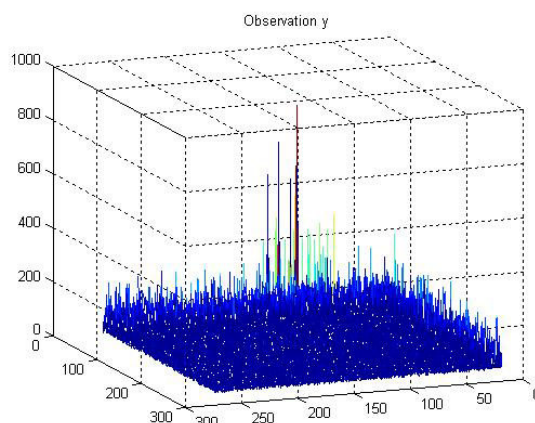
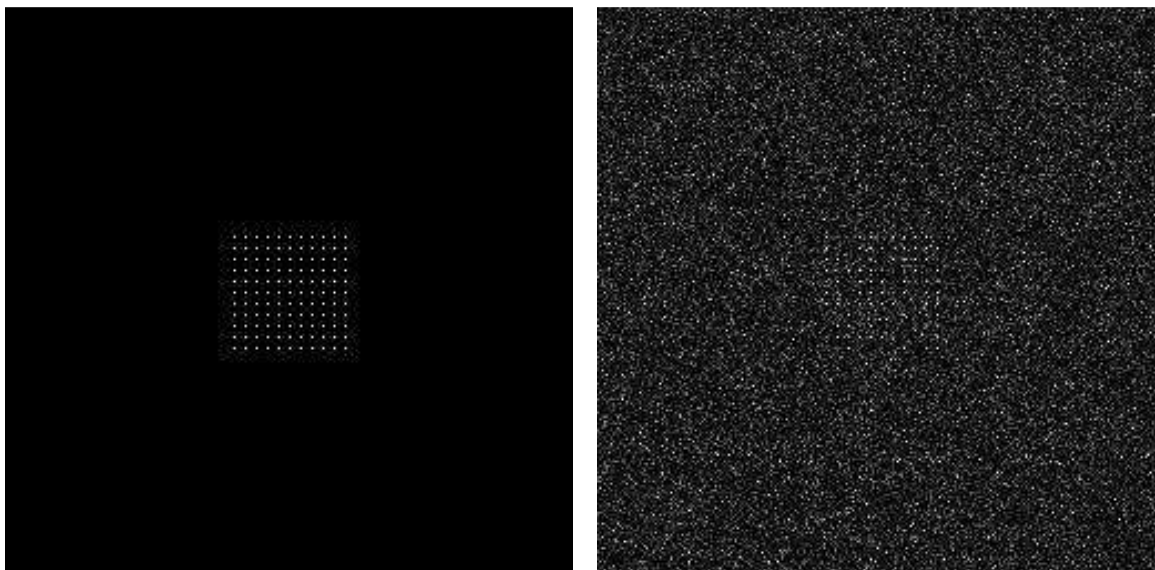


Рис. 4.7. Сигнальное изображение, содержащее 121-точечный объект, и наблюдения в экспоненциальном шуме

Размер такого окна зависит от свойств однородности шума вблизи сигнала. Минимальное окаймляющее окно имеет размер  $3 \times 3$ , в котором не учитывается центральный пиксел.

В других ситуациях сигнал не может считаться точечным. Протяженный объект представляет более интересную модель, и помимо размеров следует учитывать и форму объекта. В реальных задачах размеры и форма объекта известны лишь приблизительно. Это относится и к размеру области, в которой можно считать шум однородным.

Тем не менее, система из сигнального и помехового окон имеет важное практическое применение при построении адаптивных обнаружителей. Для формирования окон используется функция `func6_scope`, в которой входными параметрами являются горизонтальные и вертикальные размеры ( $M, N$ ) помехового окна, внутри которого образуется сигнальное окно ( $W_h, W_v$ ).

Сигнальное окно **SW** содержит **NSW** пикселей, а помеховое окно **HW** содержит **NHW** пикселей:

```
function [NHW, NSW, SW, HW]=func6_scope (M, N, Wh, Wv)
%rectangular signal and scope windows generation
%(M,N) is the total window, (Wh,Wv) is the signal window
N1=floor(N/2)+1; M1=floor(M/2)+1;
Wh1=ceil(Wh/2)-1; Wv1=ceil(Wv/2)-1;
for i=1:M
    for j=1:N
        HW(i, j)=1;
        SW(i, j)=0;
    end
end;
for i=M1-Wv1:M1+Wv1
    for j=N1-Wh1:N1+Wh1
        HW(i, j)=0; SW(i, j)=1;
    end
end
indSW=find(SW); indHW=find(HW);
NSW=size(indSW); %true cell number in the signal window
NHW=size(indHW); %true cell number in the scope window
```

Алгоритм обнаружения  $y_S \geq CA \cdot y_H$  можно рассматривать как адаптивный фильтр  $z_A = y_S - CA \cdot y_H$ , выход которого сравнивается с нулевым порогом. Здесь  $y_S$  и  $y_H$  есть результаты усреднения наблюдений по сигнальному и помеховому окнам. Алгоритм  $z_A = y - CA \cdot y_H$  реализуется функцией `func9_adap_filt`, в которой задается соответствующая пороговая константа **CA**:

```
function [ zA ] = func9_adapt_filt (CA, yS, yH)
%CA-threshold coefficient
%yS-convolution with signal window
%yH-convolution with scope window
[mS nS]=size(yS); [mH nH]=size(yH);
M=min(mS, mH); N=min(nS, nH);
for i=1:M
    for j=1:N
        zA(i, j)=yS(i, j)-CA*yH(i, j);
    end
end
```

В общем случае выход адаптивного фильтра сравнивается с ненулевым аддитивным порогом **thrA**, превышение которого фиксируется как наличие полезного сигнала. В рассматриваемом случае экспоненциального шума теоретическое значение этого порога равно нулю.

Для точечного сигнала полагаем **wh=1**, **wv=1**, и в этом случае пороговая константа **CA** может быть вычислена по формулам из раздела 3. Для ее

вычисления используется функция `func7_exp_adap_thr_calc`, вычисляющая также и пороговую дефлекцию `dA` для заданных значений вероятности ложной тревоги `F` и правильного обнаружения `D`:

```
function [ CA,dA ] = func7_exp_adap_thr_calc(F,D,M,N)
%adapt thr coefficient for MN cells
%theoretical thr deflection
a=-log10(F); NN=M*N-1; c1=10^(a/NN); CA=c1-1;
b=-log10(D); c2=10^(b/NN); dA=(c1-c2)/(c2-1);
```

В программе `main_exp_adap_thr_1_3` осуществляется моделирование алгоритма обнаружения *A-Detector* для точечного сигнала на фоне экспоненциального шума. При этом используется усреднение помеховых выборок для регулировки порога:

```
clear all % main_exp_adap_thr_1_3
clear all
STARTING_PROCESS=1 %1_INPUT IMAGE
m=256; n=256; M=1; N=1;
s=zeros(m,n);
for x=-25:5:25 %121 points
    for y=-25:5:25
        s=s+func1_rect(m,n,M,N,x,y);
    end
end
figure(1), imshow(s,[]), title('Input Binary Image');
inds=find(s); Ns=size(inds)%size of SignalField
t=input('STOP_1_InputBinaryImage_Fig1','s');
STEP=2 %2_NP Threshold Calculation
F0=0.01; D0=0.5; beta0=30;
[thr0,d0]=func2_exp_const_thr_calc(F0,D0,beta0);
thr0
d=d0% d=d0 - theoretical threshold deviation
t=input('STOP_2_InsertTheorValueDeflection','s');
STEP=3 %3_EXP NOISE GENERATION
[z0,zd]=func3_exp_noise_gen(m,n,beta0,d);
%z0, zd - matrices (m,n), m-vertical
z01=uint8(z0); z02=z01*5;
zd1=uint8(zd); zd2=zd1;
STEP=4 %4_OBSERVATION
for i=1:m
    for j=1:n
        y(i,j)=zd(i,j)*s(i,j)+z0(i,j)*(1-s(i,j));
    end;
end; %whos y
y2=uint8(y); % whos y2 %get image format
figure(4), imshow(y2,[]); title('Observation y');
%figure(41), imhist(y2);
t=input('STOP_4_GettingObservation_Fig4','s');
STEP=5 %5_DetConstThreshold
thr=thr0 %theoretical value
t=input('STEP_5_InsertTheorValueConstThr','s');
```

```

        thr
[F,I]=func4_bin(z0,thr,0);
F
figure(51), imshow(I,[]), title('FalseAlarmConstThr');
[Ds,Ps]=func5_det_sign(y,thr,s);%whos P
Ds
figure(52), imshow(Ps,[]), title('RightDetConstThr');
[D,P]=func4_bin(y,thr,0); %whos P1;
figure(53), imshow(P,[]), title('ExpDetConstThr');
t=input('STOP_5_DetConstThr_Fig53','s');
        STEP=6 %6_SignScopeWindowsConstruction
MW=3; NW=3; Wv=1; Wh=1;
[NHW,NSW,SW,HW]=func6_scope(MW,NW,Wh,Wv);
NSW %NumberPointsSignalWindow
NHW %NumberPointsScopeWindow
% figure(61), imshow(SW,[]), title('Signal Window');
% figure(62), imshow(HW,[]), title('Scope Window');
t=input('STOP_6_SignScopeWindowsConstruction','s');
        STEP=7 %SinalSignalConvolution
kS=1/NSW(1) %NSW(1) % number cells in SW
kH=1/NHW(1) %NHW(1) % number cells in HW
ss=kS*conv2(s,SW); %SignSignConv
Nss=size(ss); indss=find(ss);
Nss=size(indss)
[ms ns]=size(ss)
figure(7), imshow(ss,[]),title('SignSignConv ss');
t=input('STOP_7_SignSignConv Fig7','s');
        STEP=8 %NoiseSignalConvolution
z0S=kS*conv2(z0,SW); %NoiseSignConv
Z0S=uint8(z0S);
figure(8), imshow(Z0S,[]),title('NoiseSignConv Z0S');
%figure(81), mesh(z0S));
t=input('STOP_8_NoiseSignConv Fig8','s');
        STEP=9 %ObservationSignalConvolution
yS=kS*conv2(y,SW);
YS=uint8(yS);
figure(9), imshow(YS,[]),title('ObservSignConv yS');
%figure(91), mesh(yS);
[MyS NyS]=size(yS)
t=input('STOP_9_ObservSignConv_Fig9','s');
        STEP=10 %NoiseScopeConvolution
z0H=kH*conv2(z0,HW); %NoiseScopeConv
Z0H=uint8(z0H);
figure(10), imshow(z0H,[]),title('NoiseScopeConv z0H');
%figure(101), imhist(z0H);
%figure(102), mesh(z0H);
t=input('STEP_10_NoiseScopeConv_Fig10','s');
        STEP=11 %ObservationScopeConvolution
yH=kH*conv2(y,HW);
YH=uint8(yH);
figure(11), imshow(YH,[]),title('ObservScopeConv yH');
%figure(111), mesh(yH);
[MyH NyH]=size(yH)

```

```

t=input('STEP_11_ObservScopeConv_Fig11','s');
    STEP=12 %AdapTheorThrCalculation
[CA0,dA0]=func7_exp_adap_thr_calc(F0,0.4,3,3);
dA0    %Theoretical
CA0    % CA0=0.7783 for 1x1 3x3
CA=CA0*NHW(1)
t=input('STOP_12_InsertThisValue CA','s');
    STEP=13 %NoiseAdapFilter
zA0=func9_adap_filt(CA,z0S,z0H); %NoiseConvInput
figure(13), imshow(zA0,[]), title('NoiseOutputAdapThr');
t=input('STOP_13_NoiseOutputAdapThr Fig12','s');
    STEP=14 % AdapFiltering
    zA=func9_adap_filt(CA,yS,yH);%ObservConvInput
figure(14), imshow(zA,[]), title('OutputAdapThr');
%figure(141), mesh(zA); %whos zA;
t=input('STOP_14_ResultsConvolAdapFilter Fig14','s');
    STEP=15 %AdditiveThreshold
    thrA=0
t=input('STOP_15_InsertValue thrA','s');
    STEP=16 %FalseAlarm
[FA IA AA HA]=func4_bin(zA0,0,Nshr);
FA
FAshr=HA/AA %Checking
figure(16), imshow(IA,[]), title('FalseAlarmAdapThr');
t=input('STOP_16_FalseAlarmAdapThr Fig16','s');
    STEP=17
[DsA PsA BsA AsA]=func5_det_sign(zAS,thrA,ss);
DsA
figure(17), imshow(PsA,[]), title('RightDetAdapThr');
t=input('STOP_17_RightDetAdapThr Fig17','s');
    STEP=18
[DA PA AA HA]=func4_bin(zA,thrA,Nshr);
figure(18), imshow(PA,[]), title('DetAdapThresh');
t=input('STOP_18_ExpDetAdapThresh Fig18','s');
%figure(181), mesh(PA);
    STEP=19
level=graythresh(y2)
bw=im2bw(y2,level);
figure(19), imshow(bw,[]),title('OtsuDetConstThresh');
t=input('STEP_19_OtsuDetLevel Fig19','s');
[DOs POs BOs AOs]=func5_det_sign(bw,0.5,s);
DOs
figure(191), imshow(POs,[]),title('RightDetOtsuThr');
t=input('STEP_191_OtsuDetConstThresh Fig191','s');
[DO PO BO CO ]=func4_bin(bw,0.5,0);
figure(192), imshow(PO,[]), title('OtsuDetConstThr');
t=input('STOP_192_OtsuDetConstThr Fig192','s');
    FINAL_STEP=20 %Resume
imwrite(s,'s.jpg'); %InputSignal
imwrite(y2,'y.jpg'); %Observation
imwrite(I,'I.jpg'); imwrite(IA,'IA.jpg'); %FalseAlarms
imwrite(P,'P.jpg'); imwrite(PA,'PA.jpg');
imwrite(PO,'PO.jpg');

```

Первые пять шагов реализуют алгоритм обнаружения с постоянным порогом. На шестом шаге формируются сигнальное и помеховое окна. В данном случае сигнальное окно представляет единственный пиксел, и не меняет выборки. Помеховое окно, окаймляющее анализируемый пиксел, здесь имеет минимальные размеры  $3 \times 3$ .

Седьмой, восьмой и девятый шаги формируют свертку сигнала, шума и наблюдений с сигнальным окном. В данном случае сигнальное окно состоит из единственного пиксела, так что свертка не меняет этих процессов. Десятый и одиннадцатый шаги формируют свертку шума и наблюдений с помеховым окном. На двенадцатом шаге вычисляются пороговая константа **CA** и пороговая дефлексия решающей статистики для заданных характеристик обнаружения с использованием функции `func7_exp_adap_thr_calc`.

Тринадцатый и четырнадцатый шаги моделируют алгоритм адаптивной фильтрации  $zA = y - CA \cdot yH$ , в первом случае при действии чистого шума, а во втором – при действии смеси сигнала и шума.

На пятнадцатом шаге может быть установлен дополнительный аддитивный порог **thrA**, в данном случае равный нулю. На шестнадцатом шаге вычисляется относительное число превышений порога **FA0**, которое является оценкой вероятности ложной тревоги. Семнадцатый шаг позволяет вычислить число превышений порога в сигнальной области, т. е. оценить вероятность правильного обнаружения. Восемнадцатый шаг позволяет получить выходное бинарное изображение.

Девятнадцатый шаг реализует стандартный алгоритм бинаризации с порогом по методу Отсу. На заключительном двадцатом шаге выходные изображения записываются в файлы: **s.jpg** – сигнальное изображение, **y.jpg** – наблюдения, **I.jpg** и **P.jpg** – ложные тревоги и обнаружения для алгоритма с постоянным порогом, **IA.jpg** и **PA.jpg** – ложные тревоги и обнаружения для алгоритма с адаптивным порогом, **PO.jpg** – результат бинаризации по методу Отсу.

Результаты обработки представлены на рис. 4.8. Первое изображение показывает полезный 121-точечный сигнал. Было выбрано значение отношения сигнал/шум в каждом пикселе  $d = 5,644$ , которое обеспечивает характеристики обнаружения  $F = 0,01$  и  $D = 0,5$  для структуры с постоянным порогом. Верхний рисунок справа показывает результат обнаружения. Правильное обнаружение происходит примерно в половине сигнальных пикселов.

В структуре с адаптивным порогом помеховое окно имело размер  $3 \times 3$ , теоретическая пороговая константа для заданной вероятности ложной тревоги  $FA=0,01$  равняется  $CA=0,778$ . Для выбранного значения  $d = 5,644$  адаптивный алгоритм обеспечивает вероятность правильного обнаружения, примерно равную  $DA=0,4$ .

Это означает, что адаптивный алгоритм имеет меньшую эффективность обнаружения, и это является платой за стабилизацию вероятности ложной тревоги при изменениях параметра масштаба экспоненциального шума. На рис. 4.8 (слева внизу) это проявляется в меньшем числе верно обнаруженных сигнальных точек.

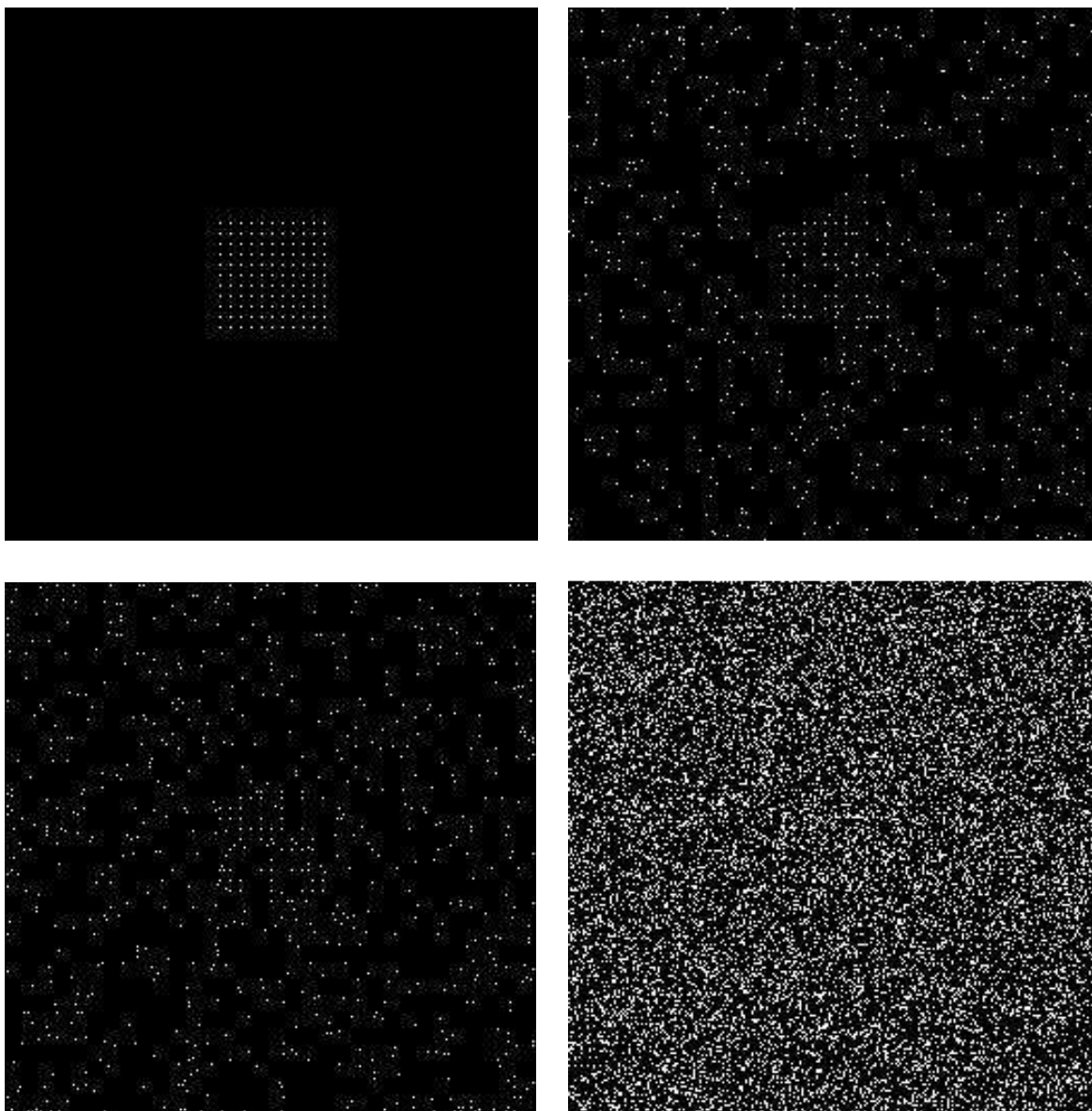


Рис. 4.8. Обнаружение 121-точечного сигнала (показанверху слева) результат обнаружения с постоянным порогом (вверху справа), результат обнаружения с адаптивным порогом (внизу слева), и результат бинаризации по методу Отсу (внизу справа)

Изображение справа внизу получается после бинаризации с порогом по методу Отсу. В связи с незначительным влиянием полезного сигнала на гистограмму изображения порог Отсу фактически разделяет на два класса помеховую выборку, и в данном случае метод Отсу оказывается неэффективным.

Рассмотрим обнаружение протяженного объекта, в этом случае сигнальное окно должно быть по возможности согласовано с формой и



размерами объекта. Пусть форма и размеры объекта и сигнального окна одинаковы, это квадраты  $16 \times 16$ , при этом для помехового окна выбраны размеры  $25 \times 25$ . Таким образом, имеется 256 выборок в сигнальном окне, которое показано на рис. 4.9 в верхнем ряду слева, и 1776 выборок в помеховом окне, которое окаймляет сигнальное окно. Отношение сигнал/шум в каждом сигнальном пикселе составляло 5,644.

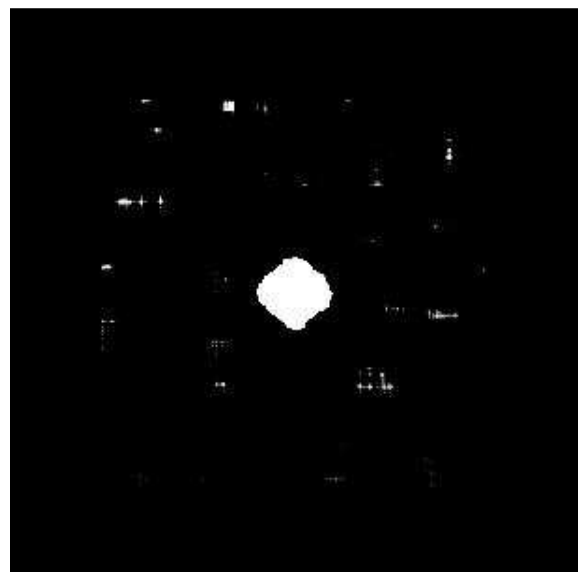
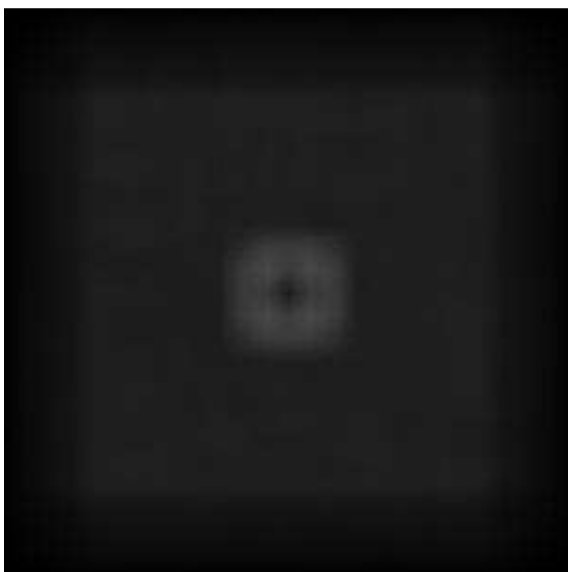
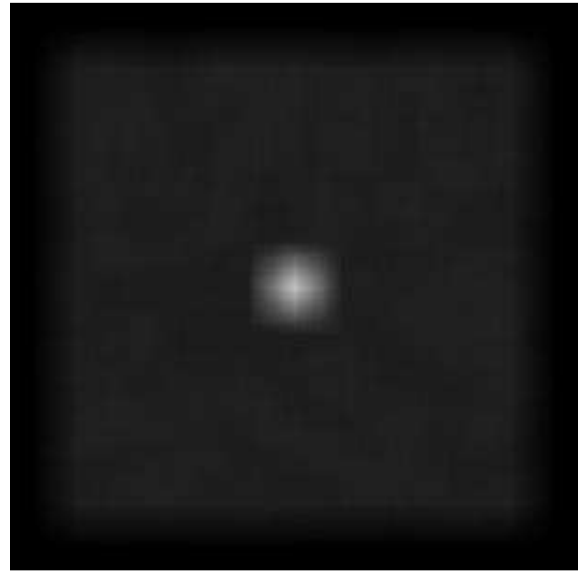
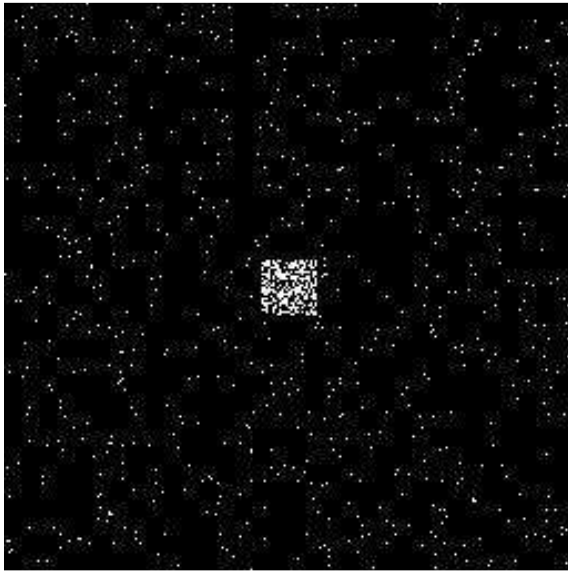
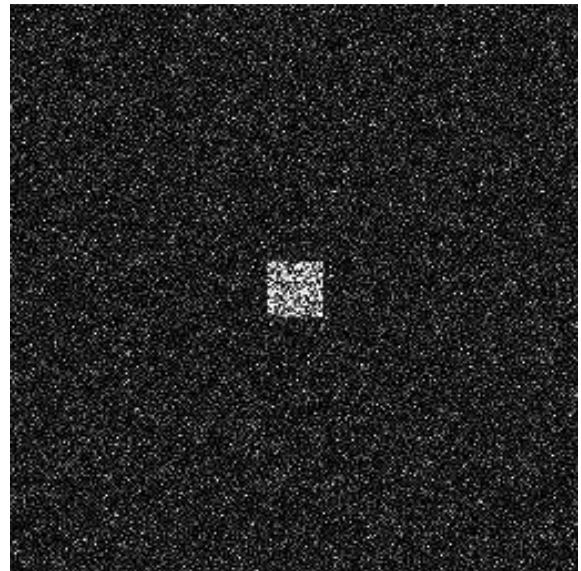
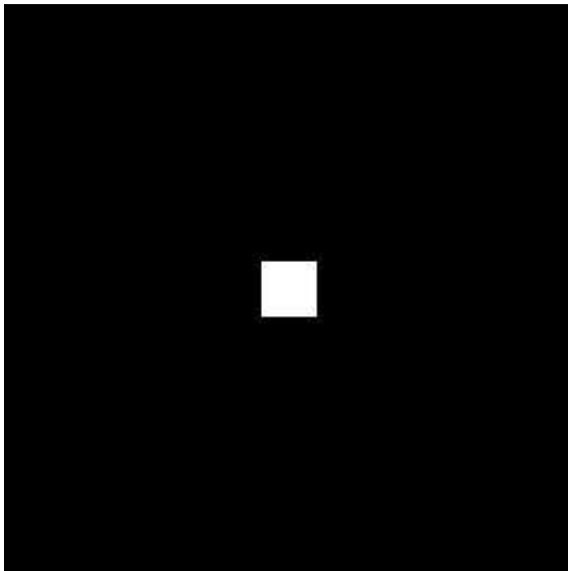


Рис. 4.9. Обнаружение протяженного объекта

Обнаружение сигнала в каждом пикселе с постоянным порогом представлено в среднем ряду слева на рис. 4.9. При выбранном отношении сигнал/шум и пороге Неймана–Пирсона правильное обнаружение происходит примерно в половине сигнальных пикселей. При этом теоретическая вероятность ложной тревоги  $F=0,01$ .

Использование сглаживания наблюдения в сигнальном окне (свертки)  $yS$  показано в среднем ряду справа. В результате накопления увеличивается отношение сигнал/шум, при этом увеличивается и вероятность правильного обнаружения. Наибольший выигрыш в отношении сигнал/шум будет при согласованной фильтрации, когда форма и размеры сглаживающего окна совпадают с сигнальной областью. Однако форма объекта при этом полностью разрушается.

Изображение слева внизу показывает результат фильтрации  $yH$  наблюдения в помеховом окне, а рисунок справа внизу соответствует выходу адаптивного обнаружителя  $zA$  после сравнения с нулевым порогом. Следует отметить, что адаптивная фильтрация приводит к корреляции помехи на выходе, в результате чего помеховые зоны становятся более протяженными, чем в случае попиксельного обнаружения.

На рис 4.10 представлены идеальный выходной процесс (сглаживание чистого сигнала) для согласованного фильтра (слева) и адаптивного фильтра (справа). Заметно различие в амплитуде сигнального пика, и ее уменьшение представляет плату за адаптацию и за достигаемую инвариантность к уровню шума.

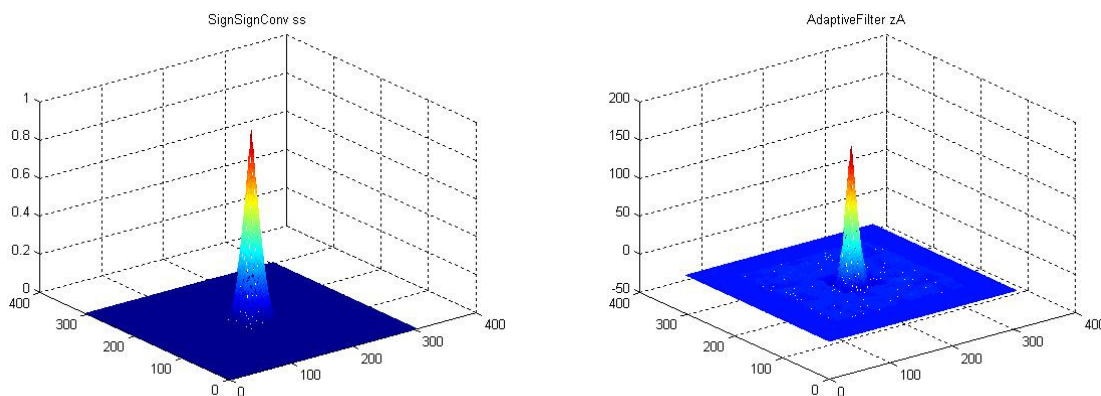


Рис. 4.10. Выходы сигнального фильтра (слева) и адаптивного фильтра (справа) при сглаживании протяженного объекта

Новым элементом в программе моделирования по сравнению с предыдущими алгоритмами является исключение краевых эффектов на изображении, связанных с работой операторов сглаживания, для чего на шестом шаге добавляется новый фрагмент, задающий параметры усечения  $p$  и  $q$ .

**STEP=6 %6\_SignScopeWindowsConstruction**

```

MW=49; NW=49; Wv=25; Wh=25;
[NHW,NSW,SW,HW]=func6_scope(MW,NW,Wh,Wv);
NSW %NumberPointsSignalWindow
NHW %NumberPointsScopeWindow
% figure(61), imshow(SW,[]), title('Signal Window');
% figure(62), imshow(HW,[]), title('Scope Window');
p=MW %shrinking parameters
q=NW
msS=ms-2*p; nsS=ns-2*q; % size of inner image
Nshr=msS*nsS %cell number after shrinking
t=input('STOP_6_SignScopeWindowsConstruction','s');

```

Усечение изображения можно начинать с восьмого шага, для которого

```

STEP=81 %Shrinking
[z0SS Nshr0]=func10_shrink(z0S,p,q);
figure(81), imshow(z0SS,[]),title('ShrinkNoiseSignConv Z0SS');
Nshr0
t=input('STOP_81_ShrinkNoiseSignConv_Fig81','s');

```

Этот фрагмент содержит функцию `func10_shrink`, которая обнуляет пиксели, окаймляющие изображение. Входными параметрами являются размеры каймы (по вертикали `p`, и по горизонтали `q`). В данном случае они равны соответствующим размерам помехового окна `MW` и `NW`. Выходной параметр `Nshr` дает число выборок, которые остаются после обнуления окаймляющего окна. При нулевом значении параметра `Nshr=0` усечение не производится.

Функция `func10_shrink` представлена следующей программой:

```

function [ Z,Nshr ] = func10_shrink(X,p,q)
%X - input image
%Z - output image
[m,n]=size(X);
m1=floor(m/2)+1; n1=floor(n/2)+1;
if p>m1+1, p=m1; end; if q>n1+1, q=n1; end;
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=0; Q(i,j)=0;
    end;
end;
for i=p+1:m-p,
    for j=q+1:n-q
        Z(i,j)=X(i,j); Q(i,j)=1;
    end;
end;
Nshr=sum(sum(Q));

```

Для формирования адаптивного порога производится свертка наблюдений с помеховым окном. Аналогичным образом производится усечение изображений на девятом и последующих шагах.

Приведенные алгоритмы обнаружения с адаптивным порогом реализуют идею локального порога. Для этого на изображении используются локальные окна. Адаптивный порог в случае экспоненциального распределения формируется сглаживанием в помеховом окне. Фактически адаптация порога осуществляется по оценке интенсивности в помеховом окне. Такой порог является быстрым, поскольку адаптация осуществляется на исходном изображении. Эквивалентным образом обнаружитель реализуется в виде адаптивного фильтра, выход которого сравнивается с постоянным (нулевым) порогом.

Другой идеей является адаптация порога при обработке последовательности изображений, такой порог будет медленным, и адаптация осуществляется не сразу по одному изображению, а с течением времени.

Следует отметить, что в результате сглаживания в локальном окне помеховое поле становится коррелированным, и меняется характер ложных выбросов по сравнению с обнаружением в каждом пикселе. Ложные тревоги на изображении приобретают структуру пятен, что препятствует дальнейшей селекции объектов на основе различий в форме. Следовательно, задачи различения и распознавания объектов нельзя рассматривать как продолжение задачи обнаружения, их решение требует других подходов, в частности, применения дифференциальных операторов для выделения границ объектов.

#### 4.5. Моделирование алгоритмов обнаружения с адаптивным порогом в случае нормального шума

Гауссовский шум содержит два параметра, поэтому алгоритм обнаружения оказывается более сложным, чем в случае экспоненциального шума. Идея параметрической адаптации порога основана на статистике Стьюдента, которую можно использовать для обнаружения сдвига математического ожидания в сигнальной области при неизвестной дисперсии нормального шума [2, 3]. Для реализации алгоритма обнаружения *t-Detector* помимо основной статистики  $y_S$  необходимо получить две статистики в помеховом окне: среднее арифметическое и выборочную дисперсию. Первая статистика  $y_H$  формируется, как и ранее, путем сглаживания. Вторая статистика  $zD$  является результатом усреднения квадратов центрированных выборок в помеховом окне.

Алгоритм обнаружения *t-Detector* имеет вид  $y_S - y_H \geq CT \cdot \sqrt{zD}$ , где  $y_S$  и  $y_H$  представляют результаты усреднения в сигнальном и помеховом окнах, а  $CT$  есть пороговая константа, зависящая от объемов выборок и требуемой вероятности ложной тревоги. Она вычисляется точно с помощью следующей функции:

```
function [ thrzT ] = func11_norm_CT0_calc(TS,N,M)
%const threshold and thr deflection calculation for norm noise
```

```
M2=M.^2-1; NU=(M+N)/M2; NU=NU/N; NU=NU*M;
thrzT=TS*sqrt(NU); %thr constant
```

Здесь входные параметры **N** и **M** представляют количество выборок в сигнальном и помеховых окнах соответственно. Величина **TS** есть процентная точка распределения Стьюдента с  $M-1$  степенями свободы. Она выбирается исходя из требуемой вероятности ложной тревоги. Для достаточно большого объема помеховой выборки значение **TS** примерно равно соответствующей процентной точке нормального распределения.

Эквивалентным образом алгоритм обнаружения с адаптивным порогом реализуется в виде адаптивного фильтра  $zT = yS - yH - CT \cdot \sqrt{zD}$ , выход которого сравнивается с аддитивным порогом, обычно нулевым.

Рассмотрим обнаружение сигнала в каждом пикселе в предположении, что объект точечный. Как и в случае экспоненциального шума, помеховое окно должно окаймлять каждый анализируемый пиксел. Рассмотрим случай минимального окаймляющего окна размером  $3 \times 3$ . Программа моделирования обнаружителя с адаптивным порогом, повторяет первые одиннадцать шагов программы `main_exp_adap_thr_1_3` из разд. 4.4.

Адаптивный фильтр реализуется функцией `func12_tdet_filt`:

```
function [ zT ] = func12_tdet_filt(CT,yS,yH,y,HW,NHW)
%CT-threshold coefficient
[mS nS]=size(yS); [mH nH]=size(yH); [m n]=size(y);
M=min(mS,mH); N=min(nS,nH);
y1=zeros(mS,nS); z1=zeros(mS,nS);
m1=ceil(mS-m); m2=floor(m1/2);
n1=ceil(nS-n); n2=floor(n1/2);
for i=1:m
    for j=1:n
        y1(i+m2,j+n2)=y(i,j);
    end;
end;
z1=y1-yH; z2=z1.^2; x2=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        x2(i,j)=z2(i+m2,j+n2);
    end;
end;
kH=1/NHW(1); zD=kH*conv2(x2,HW);
x3=sqrt(zD); zT=yS-yH-CT*x3;
```

Сигнальное изображение представлено на рис. 4.11 в верхнем ряду слева, а справа сигнал наблюдается на фоне нормального шума с параметрами  $N(30,30)$  при отношении сигнал/шум 2,326. В среднем ряду слева представлен результат обнаружения с постоянным порогом, при этом вероятность ложной тревоги  $F = 0,01$ , и правильного обнаружения  $D = 0,5$ .

Обнаружитель с адаптивным порогом *t-Detector* обеспечивает стабилизацию вероятности ложной тревоги при изменениях параметров

распределения шума, однако платой за это являются уменьшение вероятности правильного обнаружения примерно до 0,35.

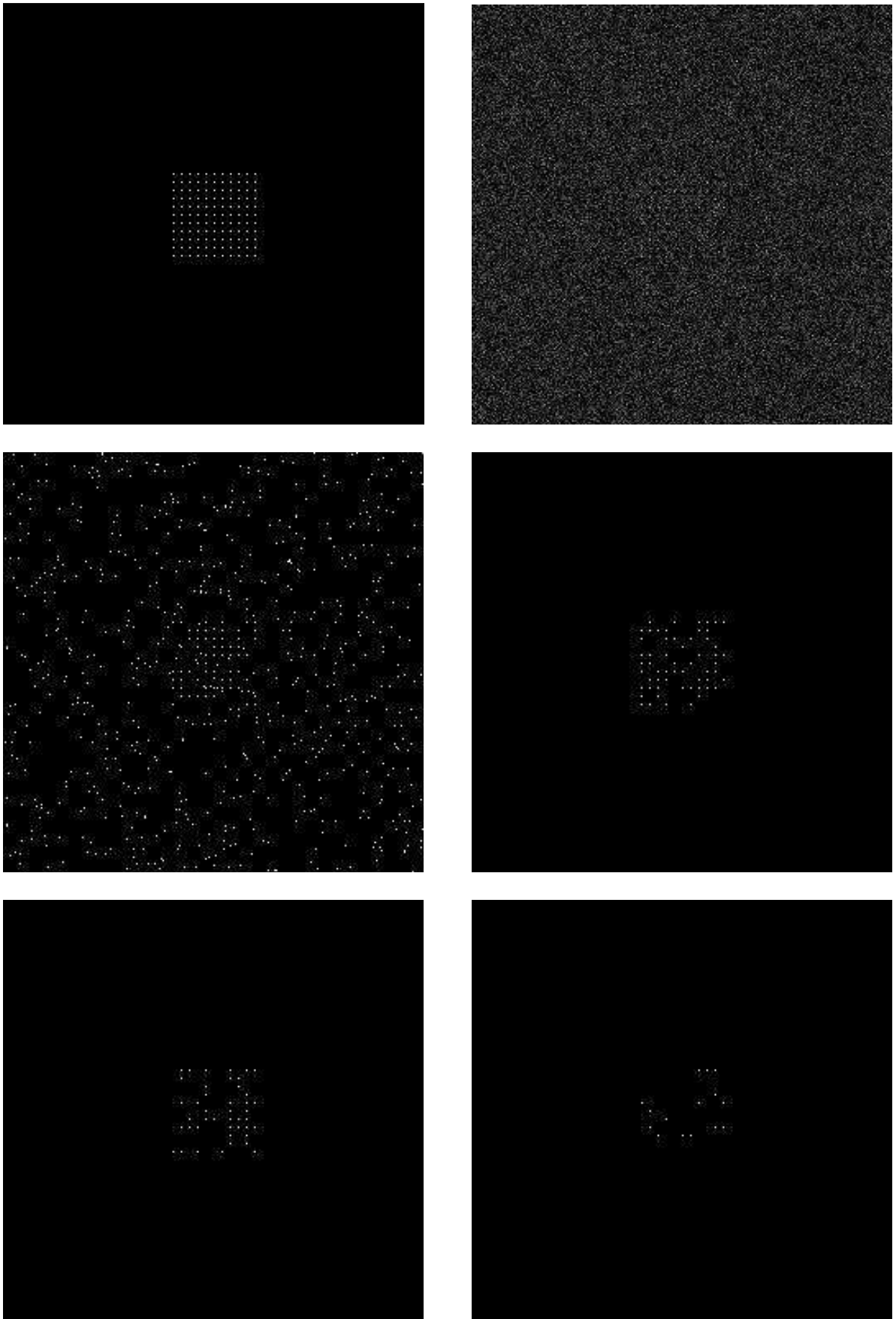


Рис. 4.11. Сигнальное изображение, содержащее 121-точечный объект, и результаты обнаружения объектов в нормальном шуме различными алгоритмами



На следующих рисунках показаны сигнальные точки, которые правильно обнаруживаются разными алгоритмами. В среднем ряду справа – алгоритм с постоянным порогом, в нижнем ряду слева – *t-Detector*, а справа – алгоритм *A-Detector*, который в данном случае не стабилизирует вероятность ложной тревоги, поскольку статистика шума не экспоненциальная.

Хотя *A-Detector* в данном случае не оптимален, он оказывается все же более устойчивым к изменениям параметров нормального шума, чем постоянный порог. Этот алгоритм осуществляет адаптацию только по среднему уровню шума, и в данном случае он проигрывает структуре *t-Detector* в эффективности обнаружения, обеспечивая меньшую вероятность правильного обнаружения, примерно равную 0,12.

Рассмотрим теперь обнаружение протяженного объекта квадратной формы, размером 16x16. Помеховое окно было выбрано размером 25x25, как и в случае экспоненциального шума. Для исключения краевых эффектов производилось усечение изображений с помощью функции `func10_shrink`.

В данном случае значение пороговой константы  $CT=0,1084$  обеспечивает вероятность ложной тревоги 0,01. Результаты обработки наблюдений представлены на рис. 4.12. В верхнем ряду представлен протяженный сигнал (слева) и результат его сглаживания в сигнальном окне (справа). В среднем ряду показаны результаты обнаружения с помощью *A-Detector* (в середине) и *t-Detector* (справа).

В нижнем ряду приведены соответствующие двумерные выходные отклики адаптивных фильтров при сглаживании чистого сигнала. Для данной модели шума *A-Detector* и *t-Detector* показали сходные характеристики обнаружения. Это объясняется тем, что при данных параметрах нормального шума его среднеквадратическое значение равно математическому ожиданию, и может быть оценено с помощью выборочного среднего. В других случаях нормального шума, когда дисперсия и математическое ожидание не связаны таким образом, *A-Detector* может оказаться неработоспособным.

Обнаружитель *t-Detector* с адаптивным порогом в случае нормального шума имеет более сложную структуру, чем обнаружитель *A-Detector* для экспоненциального шума. Он является более универсальным алгоритмом, который использует адаптацию по двум параметра: по сдвигу и по масштабу выборки, в то время как *A-Detector* применяет адаптацию только по параметру сдвига.

Использование *t-Detector* в случае экспоненциального шума допустимо, но ведет к некоторым потерям в эффективности обнаружения, поскольку адаптивный порог формируется с большими флуктуациями. В то же время применение *A-Detector* в случае нормального шума не решает проблемы стабилизации вероятности ложной тревоги при изменениях характеристик шума.

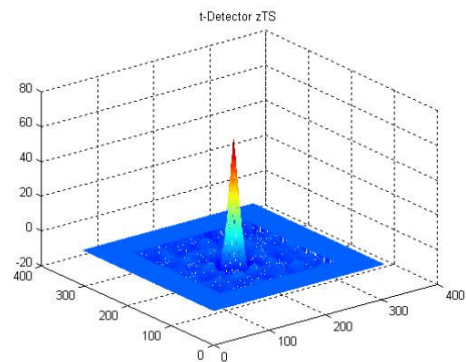
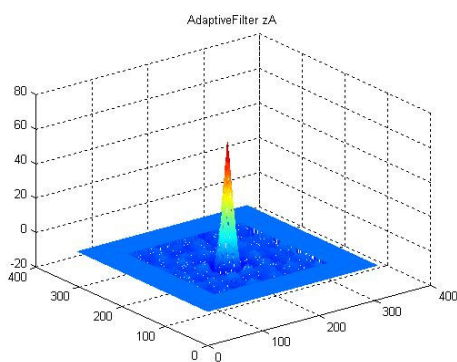
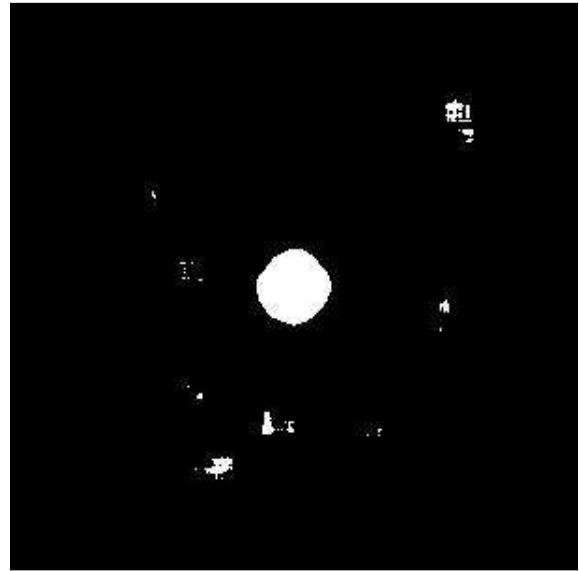
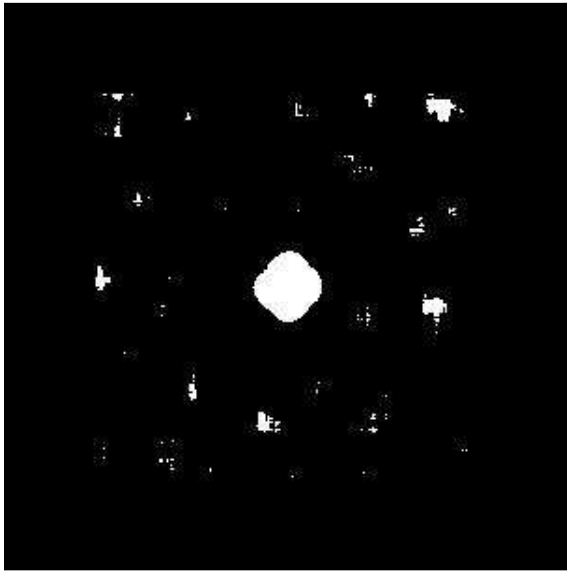
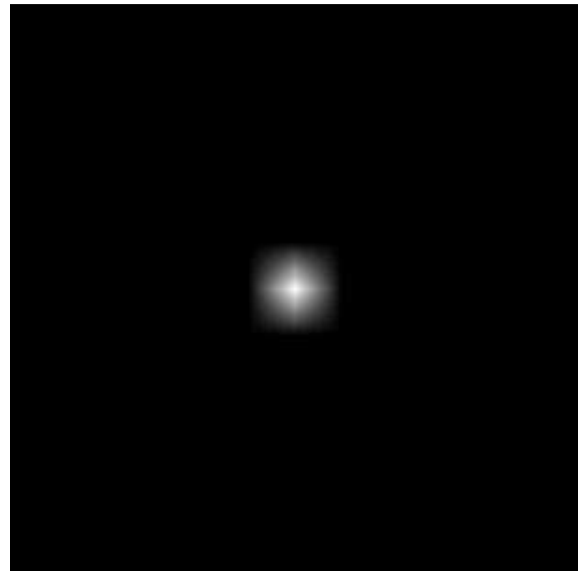
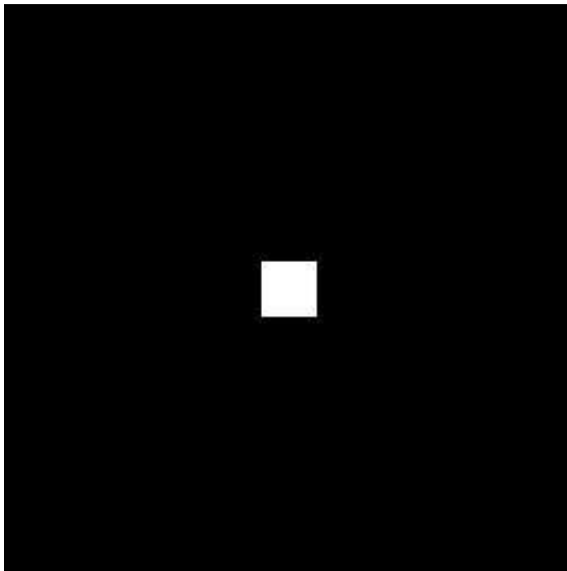


Рис. 4.12. Изображение квадратного объекта (вверху слева), результат сглаживания согласованным фильтром (вверху справа), и результаты обнаружения с помощью *A-Detector* (слева) и *t-Detector* (справа). Внизу – сигнальные пики для *A-Detector* и *t-Detector* соответственно

#### 4.6. Примеры обнаружения объектов на реальных изображениях радиотехнических систем наблюдения

Рассмотрим задачу выделения протяженных объектов на радиолокационном изображении, показанном на рис. 4.13 вверху слева. Применение постоянного порога для бинаризации не является эффективным средством. Низкий порог обнаружения (порог Отсу) приводит к появлению лишних объектов на изображении (вверху справа). Высокий порог (внизу слева) разрушает структуру протяженных объектов.

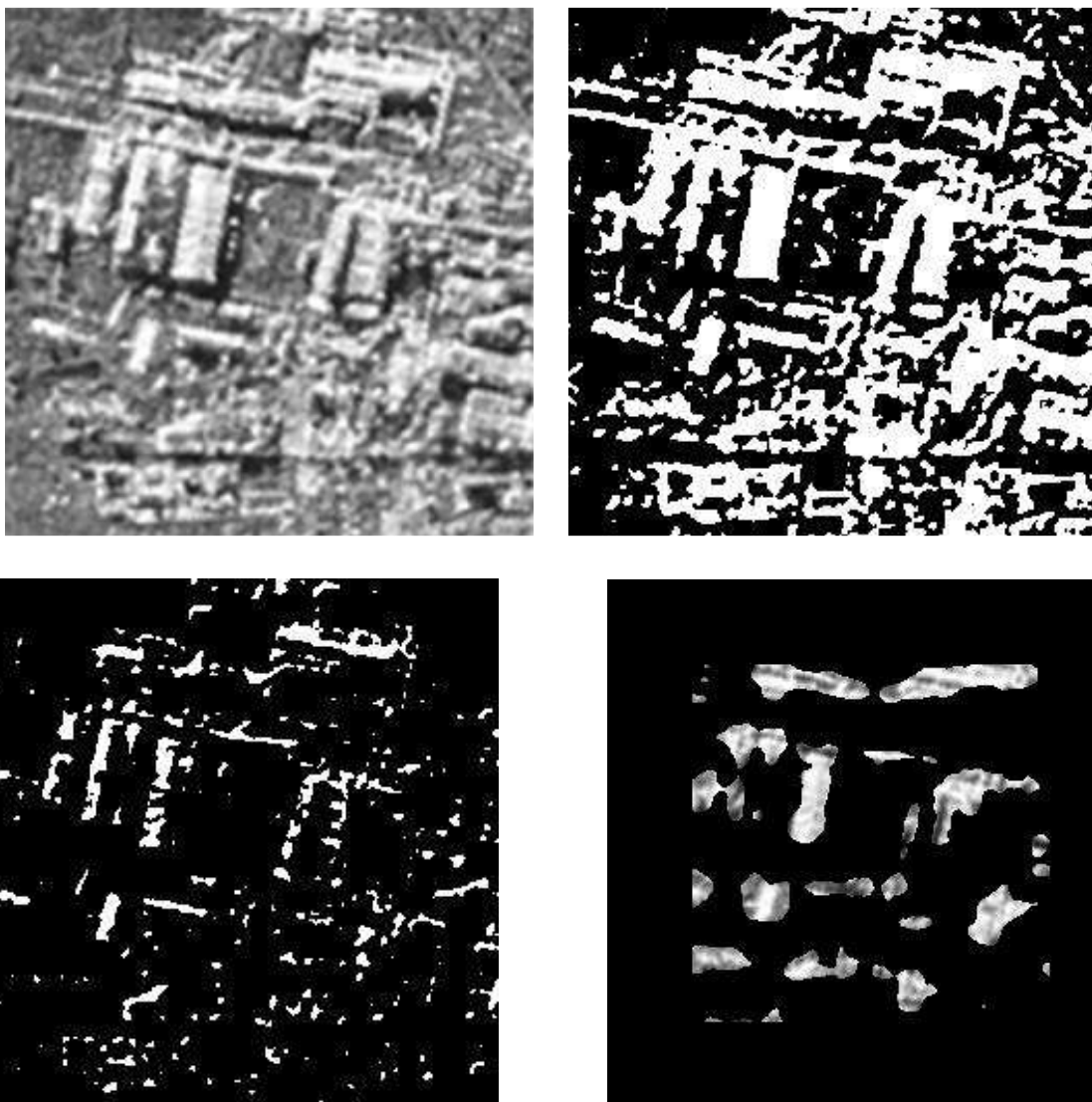


Рис. 4.13. Радиолокационное изображение (вверху слева), его бинаризация по методу Отсу (вверху справа), обнаружение с постоянным порогом без сглаживания (внизу слева) и обнаружение протяженных объектов обнаружителем с адаптивным порогом  $t$ -Detector со сглаживанием в сигнальном окне (внизу справа)

Для их выделения применялся обнаружитель с адаптивным порогом  $t$ -Detector, который использовал сглаживание в сигнальном окне  $25 \times 25$ , при этом общее локальное окно имело размер  $49 \times 49$ . На рис. 4.13 внизу справа

показаны выделенные таким образом области исходного изображения, соответствующие протяженным объектам.

На рис. 4.14 (вверху слева) представлено изображение морской сцены, полученное от инфракрасной системы наблюдения. Отметим, что морская поверхность теплее, чем область неба, что влияет на интенсивность излучения. Изображение отличается высокой степенью неоднородности распределения интенсивности сигнала. Полезный объект (корабль) также имеет различные участки, различающиеся по интенсивности, так как они соответствуют разной температуре отражающих элементов. Применение постоянных порогов не дает полезного результата (вверху справа и внизу слева).

Для выделения области нахождения корабля (внизу справа) использовался тот же обнаружитель с адаптивным порогом, что и в предыдущем случае.

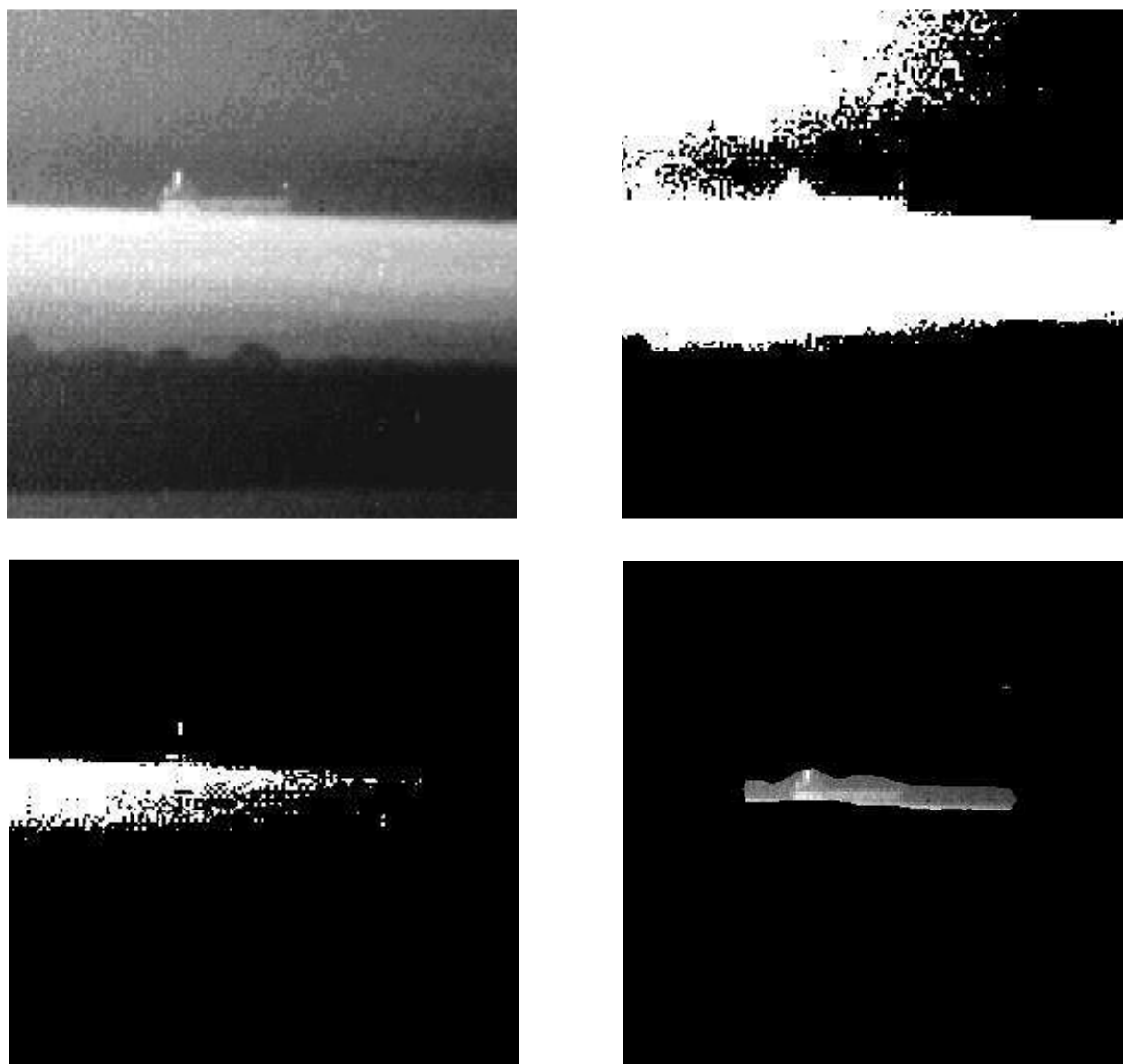


Рис. 4.14. Изображение с выхода инфракрасной системы наблюдения (вверху слева), его бинаризация по методу Отсу (вверху справа), обнаружение с постоянным порогом без сглаживания (внизу слева) и обнаружение протяженного объекта обнаружителем с адаптивным порогом *t-Detector* со сглаживанием в сигнальном окне (внизу справа)

## ВЫВОДЫ

Спектр радиотехнических задач весьма широк, но разбор и анализ простейших задач обнаружения и различения позволяет понять ряд важных закономерностей, присущих и более сложным задачам, таким как измерение параметров объектов на изображениях, разрешение сигналов и распознавание образов.

Во-первых, следует отметить роль модели при описании процессов и сигналов. Долгое время гауссовские модели считались удовлетворительными, их важность остается и сейчас ввиду того, что они описывают процессы в рамках корреляционной теории, которая оперирует только спектральными характеристиками первого и второго порядков. Это означает, что реальные процессы заменяются их эквивалентными гауссовскими моделями. В то же время многие современные задачи, в частности, связанные с потоками случайных событий, требуют более адекватного описания, и потребность в новых негауссовских моделях неуклонно возрастает. Здесь рассмотрены лишь простейшие негауссовские модели для шумовых процессов, которые описываются не более чем двумя параметрами. Они дают экономное статистическое описание, и достаточно легко поддаются осмыслению. Применение многопараметрических моделей сдерживается многими факторами: слабыми пока еще вычислительными возможностями процессоров, трудностями идентификации таких моделей, а главное, присущей почти всем радиотехническим задачам априорной неопределенностью. В связи с этим неоднократно подчеркивалась важность специальных методов обработки, использующих принципы адаптации, инвариантности и робастности.

Во-вторых, остается существенным применение математических методов анализа и синтеза алгоритмов обработки при исследованиях и разработках вследствие невозможности исчерпывающего экспериментального исследования и компьютерного моделирования всех возможных ситуаций.

В-третьих, увеличение мерности сигналов, переход к изображениям и трехмерным полям изменили традиционные подходы к обработке, использовавшиеся ранее для одномерных сигналов. Проблема размерности вынудила во многих случаях отходить от оптимальных решений в пользу менее эффективных, но быстрых и универсальных алгоритмов.

В-четвертых, усиливается тенденция к использованию уже разработанных и хорошо развитых программных средств, а также мощных программ обработки, в частности, входящих в библиотеки сред Matlab, MathCad и других оболочек.

Практически полезными оказываются универсальные алгоритмы, обеспечивающие приемлемые характеристики при изменениях характеристик процессов в широких пределах. Арсенал таких алгоритмов

непрерывно пополняется, и они проходят суровую практическую проверку на выживание. Некоторые из них исследованы в данном пособии, но большинство задач еще ждет своих исследователей. Данное учебное пособие может оказать в этом конструктивную помощь.

**Однопараметрические семейства распределений**

Экспоненциальное (показательное) распределение  $E(\beta)$  описывает непрерывную случайную величину (СВ) и имеет плотность  $f(x) = (1/\beta)\exp(-x/\beta)$  для неотрицательных значений  $x \geq 0$ , где параметр масштаба  $\beta > 0$ . Начальные моменты вычисляются по формуле:  $m_k = \beta^k k!$ , а кумулянты  $\kappa_k = (k-1)!\beta^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны  $\gamma_3 = 2$ ,  $\gamma_4 = 6$ . Такое распределение имеет сумма квадратов двух независимых гауссовских СВ с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями  $\beta^2/2$ , поэтому распределение используется для описания свойств шума после квадратичного детектирования.

Распределение Релея  $R(\beta)$  описывает непрерывную СВ с плотностью  $f(x) = (2x/\beta^2)\exp(-x^2/\beta^2)$  для  $x \geq 0$ . Математическое ожидание (МО) и второй момент распределения равны  $m = \beta\sqrt{\pi}/2 \approx 0,886\beta$ ,  $m_2 = \beta^2$ . Дисперсия распределения  $\sigma^2 = (4 - \pi)\beta^2/4 \approx 0,215\beta^2$ , т. е.  $\sigma = 0,463\beta$ , а значение коэффициента вариации  $k_v \approx 0,523$ .

Медиана релеевского распределения  $x_{\text{med}} \approx 0,832\beta$ , а отношение математического ожидания к медиане  $\rho \approx 1,064$ . Теоретические коэффициенты асимметрии и эксцесса в первом приближении равны  $\gamma_3 \approx 0,63$ ,  $\gamma_4 \approx 0,232$ , т. е. кривая плотности релеевского распределения более высокая и острая по сравнению с плотностью гауссовского распределения  $N(m, \sigma^2)$ .

Квадрат релеевской СВ имеет экспоненциальное распределение. Распределение используется для описания свойств шума после линейного детектирования.

Распределение Коши  $C(\beta)$  является примером распределения, у которого не существует ни один степенной момент. Плотность распределения имеет вид  $f(x) = (1/\pi\beta)(1 + x^2/\beta^2)^{-1}$ , для  $-\infty < x < \infty$ . Математическое ожидание не существует, так как соответствующий интеграл расходится. Второй и более высокие начальные моменты также стремятся к бесконечности. Это распределение есть частный случай распределения Стьюдента.

Распределение Пуассона  $Pos(\lambda)$  описывает дискретную СВ. Если случайная величина  $x$  принимает значения  $n = 0, 1, \dots$ , то вероятность  $P(x = n) = p_n = (\lambda^n / n!)\exp(-\lambda)$ , где параметр  $\lambda > 0$ . Все кумулянты распределения Пуассона одинаковы и равны  $\lambda$ . Это свойство пуассоновского распределения является уникальным и отражает его предельный характер для ряда преобразований. Отношение  $p_{n+1} / p_n = \lambda / (n+1)$  можно использовать для моделирования распределения.

Распределение Пуассона описывает случайное число точек (событий) за фиксированный интервал времени при наблюдении так называемого пуассоновского потока. В этом случае математическое ожидание  $\lambda$  есть среднее число точек за указанный интервал. Для однородного пуассоновского потока, имеющего постоянную интенсивность  $\lambda$ , интервалы между точками представляют независимые случайные величины с одинаковыми экспоненциальными распределениями  $E(\beta = 1/\lambda)$ .

## Приложение 2

### Двухпараметрические семейства распределений

Биномиальное распределение  $Bn(N, p)$  описывает дискретную СВ со значениями  $n = 0, 1, \dots, N$ , причем  $P(x = n) = p_n = \tilde{N}_N^n p^n (1-p)^{N-n}$  представляет вероятность  $n$  «успехов» в  $N$  «испытаниях». Последовательность независимых испытаний с одинаковой вероятностью «успеха» в каждом из них соответствует схеме Бернулли двоичного выбора с возвращением. Здесь  $p$  – вероятность успеха в отдельном испытании,  $C_N^n = N!/(n!(N-n)!)$  – биномиальные коэффициенты. Отношение вероятностей  $p_{n+1}/p_n = (N-n)p/(n+1)q$ ,  $q = 1-p$ . Математическое ожидание и дисперсия распределения равны  $m = Np$ ,  $\sigma^2 = Npq$ . При  $N \gg 1$  распределение стремится к гауссовскому (теорема Муавра-Лапласа), а при  $N \gg 1$  и  $p \ll 1$ , но  $Np = m = \text{const}$  – к распределению Пуассона  $Pos(m)$ .

Отрицательное биномиальное распределение  $NBn(v, p)$  (распределение Паскаля) характерно для задачи обратного выбора в последовательности испытаний. Испытания продолжаются до достижения заданного числа «успехов»  $v$ , так что число испытаний  $N = v + n$  случайно. Число «неуспехов»  $n = 0, 1, \dots$ , встречается с вероятностью  $P(x = n) = p_n = \tilde{N}_{v+n-1}^n p^v (1-p)^n$ . Здесь  $p$  – по-прежнему вероятность успеха в отдельном испытании. Распределение обобщается на случай нецелого значения  $v \geq 0$  следующим образом:  $p_n = (\Gamma(v + \delta)/n! \Gamma(v)) p^v (1-p)^n$ .

Математическое ожидание и дисперсия распределения равны  $m = v(1-p)/p$ ,  $\sigma^2 = v(1-p)/p^2$ . Третий и четвертый центральные моменты выражаются формулами [29]:  $\mu_3 = v(1-p)(2-p)/p^3$ ,  $\mu_4 = v(1-p)(3v(1-p) + 6(1-p) + p^2)/p^4$ . Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны  $\gamma_3 = (2-p)/\sqrt{v(1-p)}$ ,  $\gamma_4 = 6/v + p^2/v(1-p)$ .

Отрицательное биномиальное распределение может быть получено в результате компаундирования (усреднения параметра одного распределения по некоторому другому распределению). Если исходным для СВ  $n$  является распределение Пуассона, и при этом параметр  $\lambda$  распределения Пуассона считается случайной величиной с гамма-распределением  $\Gamma(v, \beta)$ , то в результате СВ приобретает отрицательно-биномиальное распределение,



причем  $v$  - заданное число «успехов», а значение вероятности «успеха» будет равно  $p = 1/(1 + \beta)$ .

Распределение, полученной компаундированием из пуассоновского распределения, называют также *сложным пуассоновским* распределением. В частном случае  $v = 1$  получается *геометрическое* распределение  $Ge(p)$ , которое определяет вероятность числа испытаний  $n$  до достижения первого «успеха»:  $p_n = p(1 - p)^n$ .

*Равномерное распределение*  $U(a, b)$  задается на отрезке  $[a, b]$ , где  $a < b$  и имеет на этом отрезке постоянное значение плотности вероятности, равное  $1/(b - a)$ . Начальные моменты даются формулой  $m_k = (b^{k+1} - a^{k+1}) / [(b - a)(k + 1)]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если  $a = 0$ ,  $b > 0$ , то  $m_k = b^k / (k + 1)$ . В частности,  $m_1 = b/2$ ,  $m_2 = b^2/3$ , а дисперсия  $\sigma^2 = b^2/12$ . Кумулянтные коэффициенты  $\gamma_1 = \sqrt{3}$ ,  $\gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_4 = -1,2$  отражают симметрию и плосковершинность кривой плотности по отношению к гауссовской плотности. Коэффициент вариации равен  $k_v \approx 0,577$ .

*Гауссовское* или *нормальное распределение*  $N(m, \sigma^2)$  для непрерывной СВ имеет плотность  $f(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(x - m)^2 / 2\sigma^2)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , где математическое ожидание  $m$  и дисперсия  $\sigma^2 > 0$  являются параметрами распределения. Все кумулянтные коэффициенты, начиная с третьего, равны нулю, и это присуще только данному распределению. Это свойство отражает особую роль нормального распределения как предельного распределения для сумм непрерывных случайных величин. Аналогичное свойство было отмечено для пуассоновского распределения, которое является предельным для сумм дискретных случайных величин.

Пара независимых гауссовских случайных величин  $(x_1, x_2)$  может быть получена из пары независимых СВ  $(\xi_1, \xi_2)$ , имеющих равномерные распределения  $U(0, 1)$  после преобразований:  $A = (-2 \ln(\xi_1))^{1/2}$ ,  $x_1 = A \cos(2\pi\xi_2)$ ,  $x_2 = A \sin(2\pi\xi_2)$ .

*Распределение Релея-Райса*  $RR(\beta, \delta)$  имеет плотность для  $x \geq 0$   $f(x) = (2x/\beta^2) \exp(-x^2/\beta^2 - \delta^2) \cdot I_0(2x\delta/\beta^2)$  и описывает распределение на выходе линейного детектора, если на входе действует гауссовский шум с дисперсией  $\beta^2/2$  и постоянным ненулевым математическим ожиданием  $a$ . При этом параметр  $\delta^2 = a^2/\beta^2$  представляет отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора. Это распределение называют также обобщенным распределением Релея. Математическое ожидание и дисперсия выражаются приближенными формулами (при  $a \gg \beta$ ):

$$m_1 = a + \beta^2 / 4a, \quad \sigma^2 = (\beta^2 / 2)(1 - \beta^2 / 8a^2).$$

Распределение Вейбулла  $WB(\beta, \gamma)$  для неотрицательной СВ имеет плотность (для  $x \geq 0$ ):  $f(x) = (\gamma/\beta)(x/\beta)^{\gamma-1} \exp(-(x/\beta)^\gamma)$ , где  $\gamma > 0$  – параметр формы, а  $\beta > 0$  – параметр масштаба. Начальные моменты определяются выражением  $m_k = \beta^k \Gamma(1 + k/\gamma)$ , где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция:  $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ ;  $\Gamma(1) = 1$ . Для целых аргументов гамма-функция связана с факториалом  $\Gamma(z+1) = z!$ . При  $\gamma = 1$  распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное распределение  $E(\beta)$  с плотностью вероятности  $f(x) = (1/\beta) \exp(-x/\beta)$ , у которого МО и дисперсия равны  $m = \beta$ ,  $\sigma^2 = \beta^2$ . Коэффициент вариации равен единице. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны  $\gamma_3 = 2$ ,  $\gamma_4 = 6$ . Иногда при сравнении распределений удобно использовать отношение  $\gamma_4 / \gamma_3^2$ , которое в данном случае равно 1,5.

Плотности вероятности для распределений Вейбулла являются несимметричными, поэтому МО отличается от моды и от медианы. Характерным является отношение МО к медиане  $\rho = m / x_{\text{med}}$ . Для экспоненциального распределения  $x_{\text{med}} = \beta \ln 2 \approx 0,693\beta$ , а отношение  $\rho \approx 1,443$ . При увеличении значения  $\gamma > 1$  асимметрия и эксцесс уменьшаются, МО  $m = \beta \Gamma(1 + 1/\gamma)$  и медиана  $x_{\text{med}} = \beta (\ln 2)^{1/\gamma}$  сближаются и стремятся к  $\beta$ .

При  $\gamma = 2$  распределение переходит в распределение Релея  $R(\beta)$ . В первом приближении для всех распределений Вейбулла с  $\gamma > 1$  можно считать  $\gamma_4 / \gamma_3^2 \approx 1,7$ . Распределение Вейбулла появляется как предельное при  $N \rightarrow \infty$  распределение максимума некоторого набора СВ  $x = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ , где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  – взаимно независимы и одинаково распределены [29]. Оно широко используется в теории надежности.

Распределение Вейбулла можно получить нелинейным преобразованием равномерного распределения: если  $z \sim U(0,1)$ , то  $x = \beta(-2 \ln z)^{1/\gamma}$  имеет распределение  $WB(\beta, \gamma)$ .

Логарифмическое нормальное (логнормальное) распределение  $LN(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$  имеет плотность  $f(x) = (\sigma_l z \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(1/2\sigma_l^2)[\ln(x/x_{\text{med}})]^2)$  для  $x \geq 0$ , где  $\sigma_l^2$  есть дисперсия СВ  $\ln x$  и является параметром формы, а медиана будет параметром масштаба. Если вместо параметров  $(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$  использовать  $(m, \sigma_l^2)$ , то плотность записывается в виде  $f(x) = (\sigma_l z \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(1/2\sigma_l^2)[\ln(x/m) + \sigma_l^2/2]^2)$ . Отношение МО к медиане равно  $\rho = m / x_{\text{med}} = \exp(\sigma_l^2/2)$  и оно также характеризует форму распределения, отсюда  $\sigma_l^2 = 2 \ln \rho$ .

Начальные моменты логнормального распределения  $m_k = m^k \rho^{k(k-1)}$ , а его дисперсия  $\sigma^2 = m^2(\rho^2 - 1)$ . Любой кумулянтный коэффициент выражается

через отношение  $\rho$  либо через коэффициент вариации  $k_v = \sigma / m = (\rho^2 - 1)^{1/2}$ , т. е.  $\gamma_3 = 3k_v + k_v^3$ ,  $\gamma_4 = 16k_v^2 + 15k_v^4 + 6k_v^6 + k_v^8$ . Кумулянтные коэффициенты всегда положительны, поскольку  $k_v > 0$ . Часто вместо  $\sigma_l^2$  используется  $\sigma_c^2 = 4\sigma_l^2$ , выражаемая в децибелах, т. е.  $\sigma_c^2[\text{дБ}] = 40 \lg \sigma_l^2$ . В частности,  $\sigma_c^2[\text{дБ}] = 4,5$  соответствует  $\sigma_l^2 = 0,7046$ ,  $\rho = 1,422$ ,  $\sigma_c^2[\text{дБ}] = 6$  соответствует  $\sigma_l^2 = 0,9953$ ,  $\rho = 1,645$ . В первом приближении для семейства логнормальных распределений справедливо соотношение  $\gamma_4 / \gamma_3^2 \approx 2$ .

Случайную величину с логнормальным распределением можно получить из гауссовской: если  $z \sim N(\mu, \sigma_l^2)$ , то  $x = \exp(z)$  имеет распределение  $LN(x_{\text{med}}, \sigma_l^2)$ , где  $x_{\text{med}} = \exp(\mu)$ .

Гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \beta)$  для непрерывной СВ описывается плотностью  $f(x) = x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) / (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))$  для  $x \geq 0$ , где параметр формы  $\alpha > -1$ , а  $\beta > 0$  – параметр масштаба. Начальные моменты вычисляются по формуле  $m_k = \beta^k \Gamma(\alpha + k) / \Gamma(\alpha)$ . Кумулянты распределения  $\kappa_k = (k-1)! \alpha \beta^k$ , МО и дисперсия равны  $m = \alpha \beta$ ,  $\sigma^2 = \alpha \beta^2$ . При  $\alpha = 1$  распределение переходит в экспоненциальное, которое является общим для семейств гамма-распределения и распределения Вейбулла. С увеличением значения параметра формы высшие кумулянтные коэффициенты убывают, т. е. форма плотности приближается к гауссовской.

Квадрат коэффициента вариации  $k_v^2 = \sigma^2 / m^2 = 1/\alpha$ . Для моментов и кумулянтов справедливы следующие рекуррентные соотношения:  $m_{k+1} / m_k = (\alpha + k)\beta$ ,  $m_{k+1} / m_k = m_k / m_{k-1} + \beta$ ,  $\kappa_{k+1} / \kappa_k = k\beta$ ,  $\kappa_{k+1} / \kappa_k = \kappa_k / \kappa_{k-1} + \beta$ . Кумулянтные коэффициенты равны  $\gamma_k = \kappa_k / \sigma^k = (k-1)! \alpha^{1-k/2}$ . Коэффициенты асимметрии и эксцесса  $\gamma_3 = 2/\sqrt{\alpha}$ ,  $\gamma_4 = 6/\alpha$ , так что отношение  $\gamma_4 / \gamma_3^2 = 1,5$ .

При  $\alpha = K + 1$  и  $\beta = 1/\nu$  гамма-распределение  $f(\tau) = \nu(\nu\tau)^K \exp(-\nu\tau) / K!$  называется *распределением Эрланга Erl(K, ν)* и описывает распределение длительности интервала времени до появления подряд ровно  $K + 1$  событий пуассоновского потока с интенсивностью  $\nu$ .

Распределение хи-квадрат  $\chi_N^2$  с  $N$  степенями свободы имеет плотность вероятности  $f(x) = \frac{x^{N/2-1} \exp(-x/2)}{2^{N/2} \Gamma(N/2)}$  при  $x \geq 0$ . Впервые распределение было рассмотрено Ф. Хельмертом (1876) и исследовано К. Пирсоном (1900). Это распределение имеет сумма квадратов  $N$  независимых стандартных нормальных СВ  $x = \sum_{k=1}^N \xi_k^2$ , где  $\xi_k \sim N(0, 1)$ . Распределение является частным случаем гамма-распределения  $\Gamma(\alpha, \beta)$  с параметрами  $\alpha = N/2$  и  $\beta = 2$ . Начальные моменты вычисляются по формуле

$m_k = N(N+2)\dots(N+2k-2)$ , а кумулянты  $\kappa_k = 2^{k-1}(k-1)!N$ . МО и дисперсия равны  $m = N$ ,  $\sigma^2 = 2N$ .

*F-распределение Фишера*  $F(N_1, N_2)$  имеет отношение  $x = (\xi/N_1)/(\eta/N_2)$  двух взаимно независимых СВ  $\xi$  и  $\eta$ , каждая из которых имеет центральное хи-квадрат распределение с числом степеней свободы  $N_1$  и  $N_2$  соответственно. Плотность вероятности имеет вид [31]

$$f(x) = \frac{\Gamma((N_1 + N_2)/2) N_1^{N_1/2} N_2^{N_2/2} x^{N_1/2-1}}{\Gamma(N_1/2)\Gamma(N_2/2)(N_1x + N_2)^{N_1/2+N_2/2}}, \quad x \geq 0.$$

Математическое ожидание существует при  $N_2 > 2$  и равно  $m = N_2/(N_2 - 2)$ . Дисперсия (при  $N_2 > 4$ ) равна  $\sigma^2 = \frac{2N_2^2(N_1 + N_2 - 2)}{N_1(N_2 - 2)^2(N_2 - 4)}$ .

Начальные моменты выражаются формулой [29]  $m_k = \Gamma(N_1/2 + k)\Gamma(N_2/2 - k)N_2^k / (\Gamma(N_1/2)\Gamma(N_2/2)N_1^k)$ , если  $N_2 > 2k$ . Мода распределения  $x_{\text{mod}} = (N_1 - 2)N_2 / (N_1(N_2 + 2))$  для  $N_1 > 2$ . При  $N_1 > 2$  и  $N_2 > 2$  мода распределения всегда меньше единицы, а МО всегда больше единицы, т. е. распределение имеет положительную асимметрию. Р. Фишер исследовал натуральный логарифм  $z = \ln(x)/2$ . Распределение  $f(z)$  называют *z-распределением Фишера*.

*t-распределение Стьюдента*  $S(v, \beta)$  имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{\pi v \beta} \Gamma(v/2)} \left[ 1 + \frac{x^2}{v\beta^2} \right]^{-(v/2+1/2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \text{где } v > 0 \text{ — параметр}$$

формы,  $\beta$  — параметр масштаба. Оно было впервые использовано в 1908 году В. Госсетом, писавшим под псевдонимом «Стьюдент» [32].

Начальные моменты распределения совпадают с центральными, причем вследствие симметрии плотности нечетные моменты равны нулю, а четные порядка  $n$  существуют при  $n < v$ . Формула для момента порядка  $n = 2k$ :

$$\mu_{2k} = \beta^{2k} v^k \frac{\Gamma(1/2 + k)\Gamma(v/2 - k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(v/2)} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)v^k \beta^{2k}}{(v-2)(v-4)\dots(v-2k)}, \quad \text{при } k < v/2.$$

Дисперсия распределения равна  $\sigma^2 = v\beta^2/(v-2)$  при  $v > 2$ . При  $v = 1$  распределение совпадает с распределением Коши  $C(\beta)$ .

При натуральном  $v = N$  это число называется степенью свободы *t-распределения*  $S(N, \beta) = S_N(\beta)$ . Если  $\xi$  имеет стандартное нормальное распределение  $N(0,1)$ , а  $\eta$  — имеет  $\chi^2$ -распределение с  $N$  степенями свободы, то  $t = \xi\sqrt{N/\eta}$  будет иметь распределение Стьюдента с  $N$  степенями свободы и  $\beta = 1$ .

*Бета-распределение*  $B(\alpha_1, \alpha_2)$  описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad \text{Параметры формы } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$$

. При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  распределение симметрично относительно нуля: при  $\alpha = 1$  распределение является равномерным, при меньших значениях  $\alpha$  форма плотности  $U$ -образна, а при больших – имеет один максимум. Начальные моменты вычисляются по формуле:

$$m_k = (\Gamma(\alpha_1 + k)/\Gamma(\alpha_1))/(\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + k)/\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ = (\alpha_1(\alpha_1 + 1)\dots(\alpha_1 + k - 1))/((\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\dots(\alpha_1 + \alpha_2 + k - 1))$$

Математическое ожидание и дисперсия равны  $m = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ ,  $\sigma^2 = \alpha_1\alpha_2/((\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + 1))$ . Мода при  $\alpha_1 > 1$ ,  $\alpha_2 > 1$  равна  $x_{\text{mod}} = (\alpha_1 - 1)/(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$ . Начальные моменты связаны рекуррентным соотношением:  $m_{k+1}/m_k = (\alpha_1 + k)/(\alpha_1 + \alpha_2 + k)$ .

Бета-распределение получается в результате преобразования  $x = \xi/(\xi + \eta)$  двух независимых СВ с гамма-распределением:  $\xi \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ ,  $\eta \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ . Бета-распределение появляется, например, как распределение порядковых статистик [29]: если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  – взаимно независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0, 1]$ , то  $k$ -я порядковая статистика  $\xi_{(k)}$  имеет бета-распределение с  $\alpha_1 = k$ ,  $\alpha_2 = N - k + 1$ .

Заменой переменной  $y = 2x - 1$  распределение преобразуется к интервалу значений  $-1 \leq x \leq 1$ , и имеет вид

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)2^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}(1+x)^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}. \text{ МО и дисперсия определяются}$$

по формулам:  $m = (\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)$ ,  $\sigma^2 = 4\alpha_1\alpha_2/((\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + 1))$ .

$m$ -распределение Накагами  $mN(\alpha, \beta)$  имеет плотность вероятности  $f(x) = (2/\beta\Gamma(\alpha))(x/\beta)^{2\alpha - 1} \exp(-(x/\beta)^2)$  для  $x \geq 0$ . Распределение хорошо моделирует амплитудные флуктуации и замирания сигналов в различных средах. Параметр формы  $\alpha$  иногда обозначается буквой  $m$ , что и определяет связь с названием распределения. При  $\alpha = 1$  получается распределение Релея, случай  $0,5 < \alpha < 1$  описывает сильные (глубокие) замирания, а  $\alpha > 1$  характерен для слабых замираний.

Моменты определяются по формуле  $m_k = \beta^k \Gamma(\alpha + k/2)/\Gamma(\alpha)$ . В ряде случаев в качестве параметра масштаба используется второй момент  $m_2 = \Omega = \beta^2 \alpha$ , отсюда  $\beta^2 = \Omega/\alpha$ . СВ с  $m$ -распределением  $mN(\alpha, \beta)$  после возведения в квадрат приобретает гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \beta = \Omega/\alpha)$ .

Обобщенное экспоненциальное распределение  $GE(\gamma, \beta)$  имеет плотность вероятности  $f(x) = (\gamma/\beta\Gamma(1/\gamma)) \exp(-(x/\beta)^\gamma)$  при  $x \geq 0$  и  $\gamma \geq 0,5$ . Начальные моменты вычисляются по формуле  $m_k = \beta^k \Gamma((k+1)/\gamma)/\Gamma(1/\gamma)$ . При  $\gamma = 1$  получаем экспоненциальное (показательное) распределение  $E(\beta)$ . При  $\gamma = 2$  одностороннее нормальное распределение имеет [28] математическое ожидание  $m = \beta/\sqrt{\pi}$  и дисперсию  $\sigma^2 = (1 - 2/\pi)\beta^2/2$ . СВ с распределением

$GE(\gamma, \beta = 1)$  получается в результате возведения в степень  $\alpha$  случайной величины с гамма-распределением  $\Gamma(\alpha, \beta = 1)$ , при этом  $\gamma = 1/\alpha$ .

$K$ -распределение  $K(\alpha, \beta)$  имеет плотность вероятности  $f(x) = (2/\beta\Gamma(\alpha))(x/\beta)^{(\alpha-1)/2} K_{\alpha-1}(2\sqrt{x/\beta})$  при  $x \geq 0$  и  $\alpha > 0$ . Здесь  $K_{\alpha-1}(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода [2,19]. Иногда в качестве параметра формы вводится величина  $\nu = \alpha - 1$ .

Начальные моменты вычисляются по формуле  $m_k = k!\beta^k\Gamma(k + \alpha)/\Gamma(\alpha)$ . Распределение можно получить путем умножения двух СВ с распределениями  $E(1)$  и  $\Gamma(\alpha, \beta)$ . Квадрат коэффициента вариации распределения  $k_v^2 = \sigma^2/m^2 = 1 + 2/\alpha$  всегда больше единицы. Фактически реализуется компаундирование гамма-распределения экспоненциальным распределением.

Распределение хорошо моделирует флуктуации интенсивности и эффекты затенения лучей при распространении вдоль неровной земной или морской поверхности. При  $\alpha = 0,5$  распределение совпадает с распределением Вейбулла с параметром формы  $\gamma = 0,5$ , вчетверо меньшим параметром масштаба  $WB(0,5, \beta/4)$ , а при  $\alpha \rightarrow \infty$  распределение стремится к экспоненциальному распределению  $E(\beta)$ .

Другая форма  $K$ -распределения описывает амплитудные флуктуации. Величина  $y = \sqrt{x}$  имеет плотность вероятности  $f(x) = (4/b\Gamma(\alpha))(y/b)^\alpha K_{\alpha-1}(2y/b)$ , где  $b = \sqrt{\beta}$ . Теперь четные начальные моменты  $m_{2k} = k!\beta^k\Gamma(k + \alpha)/\Gamma(\alpha)$ . При  $\alpha \rightarrow \infty$  это распределение стремится к релеевскому распределению  $R(\beta)$ .

Распределение Парето  $Par(\nu, a)$  получается в результате преобразования экспоненциального распределения: если  $z \sim E(\beta = 1/\nu)$ , то  $x = a \cdot \exp(z)$  имеет распределение  $Par(\nu, a)$  с плотностью  $f(x) = (\nu/a)(a/x)^{\nu+1}$  при  $x \geq a$ . Здесь  $\nu$  является параметром формы, а  $a > 0$  есть параметр масштаба. Начальные моменты равны [29]  $m_k = \nu a^k / (\nu - k)$  при  $k < \nu$ . МО и дисперсия равны  $m = a\nu/(\nu - 1)$ ,  $\sigma^2 = a^2\nu/((\nu - 1)(\nu - 2))$ . Квадрат коэффициента вариации  $k_v^2 = (\nu - 1)/((\nu - 2)\nu)$ . В частном случае  $a = 1$  получаем степенное распределение с плотностью  $f(x) = \nu(1/x)^{\nu+1}$  при  $1 \leq x < \infty$ .

Распределение экстремальных статистик первого типа  $EV_1(\theta, \gamma)$  имеет плотность  $f(x) = \gamma \exp(-\gamma(y - \theta) - e^{\gamma(y-\theta)})$ , где  $\theta$  – параметр сдвига, а  $\gamma > 0$  – параметр формы. Распределение получается в результате логарифмического преобразования СВ, имеющей распределение Вейбулла  $WB(\beta, \gamma)$ , при этом  $\theta = \ln \beta$ .

Характеристическая функция имеет вид  $\Theta(ju) = \beta^{ju} \cdot \Gamma(1 + ju/\gamma)$ . Математическое ожидание и дисперсия равны  $m = \theta + \psi(1)/\gamma$ ,  $\sigma^2 = \psi'(1)/\gamma^2 = \pi^2/6\gamma^2$ . Здесь  $\psi(1)$  и  $\psi'(1)$  есть логарифмические производные гамма-функции первого и второго порядков в точке  $z=1$ . С помощью справочника [27, 29, 30] можно получить  $m \approx \theta - 0,5772/\gamma$ ,  $\sigma^2 \approx 1,6449/\gamma^2$ . Кумулянты  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ) вычисляются по формуле  $\kappa_n = \psi^{(n-1)}(1)/\gamma^n$ . В первом приближении имеем  $\kappa_3 = -2,4041/\gamma^3$ ,  $\kappa_4 = 6,4939/\gamma^4$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков, В. Ю. Обнаружение и различение сигналов в радиотехнических задачах: учеб. пособие / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2000.
2. Волков, В. Ю. Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов: учеб. пособие / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2005.
3. Волков, В. Ю. Адаптивные, инвариантные и робастные методы обнаружения и различения сигналов : учеб. пособие : часть 2 / В. Ю. Волков ; СПбГУТ. – СПб., 2008.
4. Растринин, Л. А. Гибридное распознавание / Л. А. Растринин // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 3–20.
5. Dillard, G. M. Mean-Level Detection Of Nonfluctuating Signals / G. M. Dillard // IEEE Trans. – 1974. – V. AES-10, Nov. – P. 795–799.
6. Finn H.M., Johnson R.S. Adaptive Detection Mode with threshold control as a function of spatially sampled clutter level estimators – RCA Rev. V.29, №3, Sept, 1968, P.414-465.
7. Волков, В. Ю. Алгоритмы обнаружения локационных сигналов на фоне помехи с неизвестными параметрами / В. Ю. Волков, А. А. Оводенко // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981 – № 5. – С. 25–41.
8. А.с. 123950 СССР. Обнаружитель сигнала с адаптивным порогом. Заявка № 2214972, 03.02.77 / В. Ю. Волков
9. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я. Д. Ширмана: учебное пособие для вузов. – М. : Сов. радио, 1970.
10. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – 3-е изд., перераб. и доп. / Б. Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989.
11. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд. / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982.
12. Леман, Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1979.
13. Большев, Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики / Л. Р. Большев, Р. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983.

14. Богданович, В.А., Прокофьев В.Н. Несмещенные правила обнаружения оптических сигналов в шумах с неизвестной интенсивностью / В. А. Богданович, В. Н. Прокофьев // Радиотехника и электроника. – 1973. – № 12. – С. 2493–2500.
15. Прокофьев, В. Н. Некогерентный обнаружитель флуктуирующих сигналов в шумах неизвестной интенсивности / В. Н. Прокофьев // Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1970. – № 2.
16. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др. ; Под ред. П. А. Бакута. – М. : Сов. радио, 1984.
17. Волков В. Ю. Обнаружение сигнала фотоприемника в пуассоновском шуме неизвестной интенсивности / В. Ю. Волков // Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1987. – Т. 30. – № 7. – С.76–78.
18. Гальярди, Р. М. Оптическая связь / Р. М. Гальярди Ш. Карп : пер. с англ. – М. : Связь, 1978.
19. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган ; пер. с англ. – М. : Наука, 1979.
20. Волков, В. Ю. Обнаружение пачки оптических импульсов, принимаемых инерционным фотоприемником / В. Ю. Волков // Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1991. – Т. 34. – № 8. – С.23–29.
21. Кэк, М. Самообучающаяся схема обнаружения / М. Кэк // Зарубежная радиоэлектроника. – 1962. – № 10. – С. 35–40.
22. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1984.
23. Волков, В.Ю. Анализ процесса установления порога при изменении интенсивности шума в адаптивных и робастных обнаружителях локационного сигнала / В. Ю. Волков, А. А. Оводенко // Радиотехника. – 1982. – Т. 37. – № 11. – С. 45–47.
24. Большаков И.А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума / И. А. Большаков. – М. : Советское радио, 1969.
25. А. с. 915252 СССР. Устройство автоматического регулирования среднего числа шумовых выбросов / А. А. Бабанов, В. Ю. Волков и др. Заявка № 2951066, 01.07.81.
26. Кендалл, М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт : пер. с англ. – М : Наука, 1973.
27. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш : пер. с нем. – М. : Наука, 1977.
28. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1 / Б. Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1969.
29. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985.
30. Люк, Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк ; пер. с англ. – М.: Мир, 1980.



31. Прикладная статистика : основы моделирования и первичная обработка данных : справочное издание / Под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

32. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1975.

**Волков Владимир Юрьевич**

**АДАПТИВНЫЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ И РОБАСТНЫЕ  
МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ**

**Учебное пособие**

**Часть 3**

Редактор

План 2012 г., п. 49

Подписано к печати 12.11.2012

Объем 5,5 усл.-печ. л. Тираж 100 экз. Заказ 145

Издательство СПбГУТ. 191186 СПб., наб. р. Мойки, 61

Отпечатано в СПбГУТ